PARÁMETROS ELÉCTRICOS FUNDAMENTALES

Cargas eléctricas.

Es un hecho conocido que frotando una barra de plástico con un paño y acercándola luego a pequeños pedazos de papel éstos son atraídos hacia la barra.
Si se aproximan una barra de ebonita a otra de vidrio, se comprobará que no existe ningún efecto entre ellas (ni atracción ni repulsión). Si luego se las frota y se las acerca una contra otra se notaran los efectos de atracción. Se dice entonces que los cuerpos están electrizados y se puede concluir que la electrización se produjo por frotamiento. A éste tipo de electricidad se la denomina estática. Todos estamos familiarizados con los efectos de la electricidad estática incluso algunas personas son más susceptibles que otras a su influencia. Para explicar como se origina la electricidad estática, hemos de considerar que la materia está compuesta de átomos, y los átomos de partículas cargadas, de modo de que queda conformada por un núcleo compuesto por protones con carga positiva y de neutrones carentes de carga eléctrica, rodeado de una nube de electrones que tienen carga negativa. Normalmente, la materia es neutra, tiene el mismo número de cargas positivas (protones) y negativas (electrones).
En el caso de las barras algunos electrones abandonan en unos a ésta, por acción del frotamiento, y otra veces abandona el paño para pasar a la barra.
El exceso de electrones da lugar a cargas negativas, y su falta a cargas positivas.
Si un material tiende a capturar electrones cuando entra en contacto con otro material, se dice que dicho material es más negativo que el otro. La serie serie "tribo – eléctrica" ordena los materiales en función de la capacidad de capturar electrones.
Algunos materiales ordenados de más positivo a más negativo de la serie tribo – eléctrica son: piel de conejo, vidrio, pelo humano, nylon, lana, seda, papel, algodón, madera, ámbar, polyester, poliuretano, vinilo (PVC), teflón.
El vidrio frotado con seda provoca una separación de las cargas por que ambos materiales ocupan posiciones distintas en la serie tribo - eléctrica, lo mismo se puede decir del ámbar y del vidrio.
Cuando dos materiales no conductores entran en contacto uno de los materiales puede capturar electrones del otro material. La cantidad de carga depende de la naturaleza de los materiales (de su separación en la serie tribo - eléctrica), y del área de la superficie que entra en contacto.
De lo anterior se concluye que:

- La materia contiene dos tipos de cargas eléctricas denominadas positivas y negativas.
- Los objetos no cargados poseen cantidades iguales de cada tipo de carga.
- Cuando un cuerpo se frota la carga se transfiere de un cuerpo al otro, uno de los cuerpos adquiere un exceso de carga positiva y el otro, un exceso de carga negativa.
- En cualquier proceso que ocurra en un sistema aislado, la carga total o neta no cambia.
- Los objetos cargados con cargas del mismo signo, se repelen.
- Los objetos cargados con cargas de distinto signo, se atraen.

Los electrones son idénticos para todas las sustancias (los de cobre son iguales que los del vidrio o la madera), siendo estas, las partículas más importantes en los mecanismos de la conducción eléctrica, ya que disponen de carga y movilidad para desplazarse por las sustancias. La diferencia entre dos materiales vendrá dada, entre otras cosas, por la cantidad y movilidad de los electrones que la componen.
Para poder realizar cálculos en donde intervengan las cargas eléctricas es necesario cuantificar su magnitud. La unidad de carga eléctrica es el Coulomb [C] y es equivalente a la carga que suma $6,28 \times 10^{18}$ electrones (seis trillones doscientos ochentamil billones).

Potencial eléctrico.

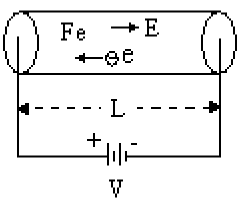
Si una carga positiva y otra negativa se separan a una cierta distancia y luego se las deja en libertad, éstas se atraerán una hacia la otra. En éstas condicione se dice que ambas cargas adquirieron energía potencial eléctrica al separarlas. Esto se evidencia en el hecho que al dejarlas en libertad se aceleran una hacia la otra transformando la energía potencial en cinética (velocidad). Lo mismo ocurre si dos cuerpos se cargan, por cualquier medio, con polaridades distintas y se los interconecta mediante un conductor eléctrico. En efecto, entre ambos cuerpos existirá una diferencia de potencial en virtud de la diferencia de cargas eléctricas. Los electrones del cuerpo cargado con exceso de electrones (carga negativa) serán atraídos hacia los del cuerpo cargado positivamente intentando la neutralización de las cargas eléctricas.
De lo anterior puede observarse que a la diferencia de cargas eléctricas se la puede evaluar en función de la diferencia de potencial que producen.
Un "agente externo" deberá realizar un trabajo para quitar electrones de un cuerpo (dejándolo cargado positivamente) y los colocarlos en otro cuerpo (cargándolo negativamente). Se define al potencial eléctrico, o mejor dicho a la "diferencia de potencial eléctrico" como el cociente entre el trabajo realizado por el agente para separar las cargas dividido la totalidad de cargas separadas. Matemáticamente:

$$U = \frac{W}{Q}$$

en donde U es la diferencia de potencial cuya unidad de medida es el volt o voltio [V] , W es el trabajo realizado en Joule [J] y Q la cantidad de carga separada en Coulomb [C].
Si a los dos cuerpos cargados mencionados anteriormente se los interconecta con un conductor eléctrico se establecerá entre ellos un flujo de electrones del cuerpo cargado negativamente al cargado positivamente. Este flujo se mantendrá hasta que la diferencia de cargas eléctricas entre los cuerpos quede neutralizada. Este flujo de electrones no es otra cosa que una *corriente eléctrica*.
Existen dispositivos que establecen en forma permanente una diferencia de potencial entre sus terminales (cuyo valor puede ser constante o variar periódicamente), tales como las baterías, generadores, alternadores, celdas fotovoltáicas, etc.. Tales dispositivos se denominan en forma genérica "fuentes de alimentación" o "fuentes de tensión".

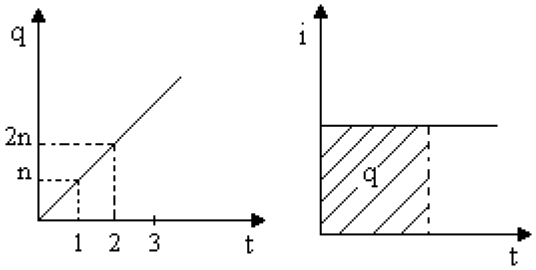
Corriente Eléctrica.

Cuando se aplica una diferencia de potencial o tensión **(V)** entre los extremos de un conductor de longitud (R), se establece un movimiento, ordenado de los electrones desde el polo (-) al (+) de la fuente de tensión constituyéndose así una **Corriente Eléctrica (I).**



En los albores de la electricidad se pensó que se movían las cargas (+) desde el polo (+) al (-) de la fuente, y este sentido, llamado técnico o convencional aun se conserva. Sin embargo debe tenerse presente que el sentido real del movimiento de las cargas es de negativo a positivo. A los efectos de los cálculos es indistinto el sentido de circulación de las cargas eléctricas.
La intensidad de la corriente eléctrica se evalúa en base a la carga eléctrica que atraviesa la sección transversal del conductor, en la unidad de tiempo (equivalente al n° de electrones / seg que pasa por ella). Por ejemplo, si pasa 1 coulomb por segundo, la intensidad es de **1 Amper** o sea:

$$1[\mathbf{A}] = \frac{1[\mathbf{coul}]}{[\mathbf{seg}]}$$



Si la carga (q) que pasa en la unidad de tiempo es constante, o sea, si la carga q transferida en un tiempo (t) es proporcional a este, la intensidad de la corriente i vale:

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{t}}[\mathbf{A}]$$

De aquí resulta que la carga transportada en el tiempo es: $\mathbf{q} = \mathbf{i.t}$ y por lo tanto igual al área debajo de la grafica de $\mathbf{i} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$.
El transporte de los electrones por el conductor se debe a la existencia de un campo eléctrico $\vec{E} = V/L$ dirigido desde el punto de mayor al de menor potencial, lo que engendra una fuerza eléctrica $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{e}\vec{E}$ sobre los electrones libres del conductor y los desplaza en sentido contrario a $\vec{E}$ con una velocidad **(V_d).**

<u>Densidad de corriente.</u>

Se define a la densidad de corriente a la relación entre la intensidad de corriente que atraviesa una superficie dividido el área de dicha superficie. O sea:

$$J = \frac{I}{A}$$

La unidad de J es A/m^2.
Por ejemplo, sea calcular la densidad de corriente en un conductor de 2.5 mm^2 de sección que transporta una intensidad de corriente de 15 A. La densidad de corriente es de:

$$J = \frac{15}{2{,}5} = 6 \text{ A/m}^2$$

<u>Elementos del Circuito Eléctrico</u>

En general, todo circuito eléctrico se componen de:

Elementos Activos:

que son los que inyectan energía al circuito y se denominan fuentes de alimentación o de tensión.

Elementos Pasivos:

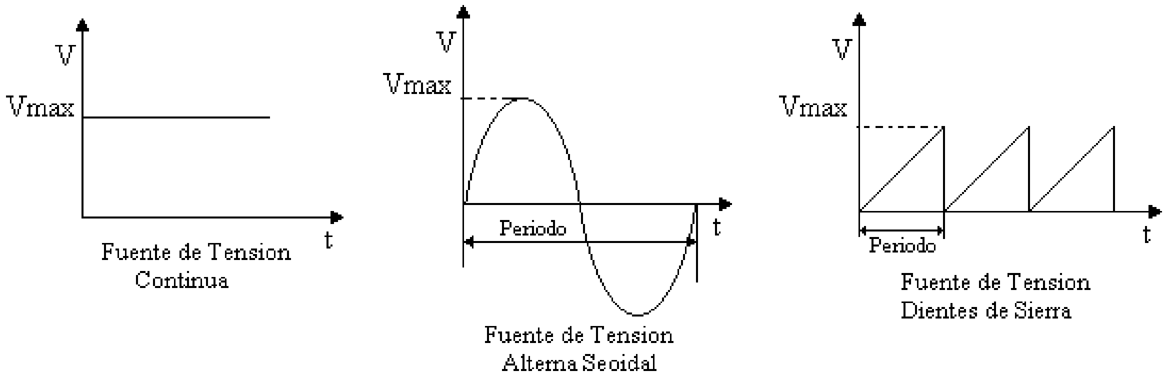
son los que almacenan o intercambian energía con el con su entorno. Medio y se dividen en:

1) Resistores o resitencias.
2) Capacitores
3) Inductores.
4) Induct. mutuas

Fuentes de tensión:

Imponen el valor de la tensión entre dos puntos del circuito, impulsando el flujo de electrones por el mismo. Las fuentes de tensión pueden ser constantes o variables en el tiempo según una ley preestablecida.

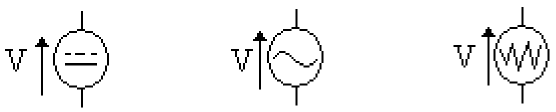
Ejemplo:



En la izquierda se representa una fuente cuya tensión es invariable en el tiempo. A éstas fuentes se las denomina de tensión continua y la podemos encontrar en las pilas, baterías, dinamos, etc.. En el medio se representa una fuente en donde la tensión varía periódicamente al transcurrir el tiempo según una ley senoidal. A éstas fuentes se la denomina de tensión alterna y son las que suministran los alternadores de las usinas generadoras de energía eléctrica. Este tipo de tensión es la que encontramos, también, en los tomacorrientes de nuestros hogares. Finalmente, la tensión representada en la derecha es también periódica con una forma de onda denominada en diente de sierra. Este tipo de fuentes tienen utilidad en algunos equipos eléctricos para uso industrial, médico etc.. Cabe aclarar que cuando se menciona el tiempo en las fuentes de alimentación, éstos de una magnitud muy pequeña, del orden de los milisegundos.

Símbolos:

Una pequeña circunferencia con el dibujo de la clase de tensión que produce en su interior, y una flecha que indica el sentido en que actúa la tensión en sentido positivo.



Resistores o resistencias.

Se define como resistencia eléctrica a la oposición ofrecida por ésta al paso de la corriente eléctrica.
Los resistores transforman la energía eléctrica en calor. El paso de cargas eléctricas (corriente eléctrica) a través de un resistor provoca una disminución de la energía potencial eléctrica de las cargas. El calor generado por el resistor es igual a la disminución de la energía potencial de las cargas que lo atravesaron.
La unidad de resistencia eléctrica es el ohm (Ω).
Los tres parámetros eléctricos vistos hasta ahora se relacionan a través de la **Ley de Ohm**, ley ésta, fundamental para la resolución de los circuitos eléctricos. Esta ley establece que:

La intensidad de corriente que circula por un circuito eléctrico es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia.

Matemáticamente:

$$I = \frac{U}{R}$$

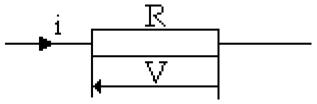
de aquí se pueden obtener, despejando la expresión anterior:

$$U = I \times R$$
$$R = \frac{U}{I}$$

Si **(V)** esta en Volt e **(I)** en Amper y **(R)** en Ohm.
Si la resistencia es constante para cualquier valor de tensión aplicada, es decir, independiente de los valores de **(V)** o **(I)** el resistor es *lineal* y se dice, en éstas condiciones, que cumple con la ley de ohm; en caso contrario es <u>alineal.</u>
Siempre se usarán letras mayúsculas para valores de tensión o corriente continua y minúsculas para el caso de tensiones o corrientes variables con el tiempo, llamándolos en este caso "valores instantáneos". En estos casos la ley de ohm queda:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$
$$u(t) = i(t) \times R$$
$$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

Simbología del resistor:



La punta de la flecha de **(V)** indica el punto de mayor potencial. La flecha de **(i)** el correspondiente sentido de la corriente.
En la resolución de circuitos se suele utilizar, en vez de la resistencia, su inversa que es la conductancia, o sea:

$$\mathbf{G = \frac{1}{R}}$$

Esta se puede definir, en contraposición con la resistencia, como la facilidad con que un componente de circuito deja pasar a las cargas eléctricas. La unidad de conductancia es el Siemens.
Reemplazando a la resistencia por la conductancia, la ley de ohm queda:

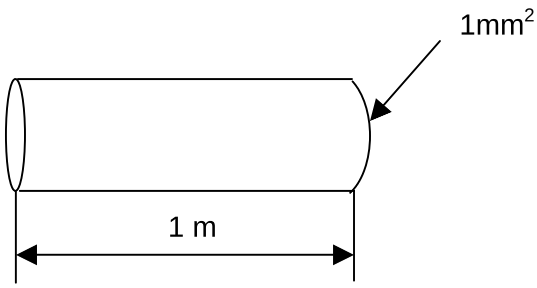
$$\mathbf{I = U \times G}$$

$$\mathbf{U = \frac{I}{G}}$$

$$\mathbf{R = U \times G}$$

<u>Resistividad</u>

La resistividad de un material es una propiedad intrínseca del mismo.
Se define a la resistividad ρ de un material dado como la resistencia de un espécimen de un metro de longitud y un milímetro cuadrado de sección.



La unidad de resistividad es el Ω mm²/m. Para el cobre, que es el conductor mas generalizado en electrotecnia, la resistividad es:

$$\rho = \frac{1}{57} = 0{,}01754\Omega\frac{mm^2}{m}$$

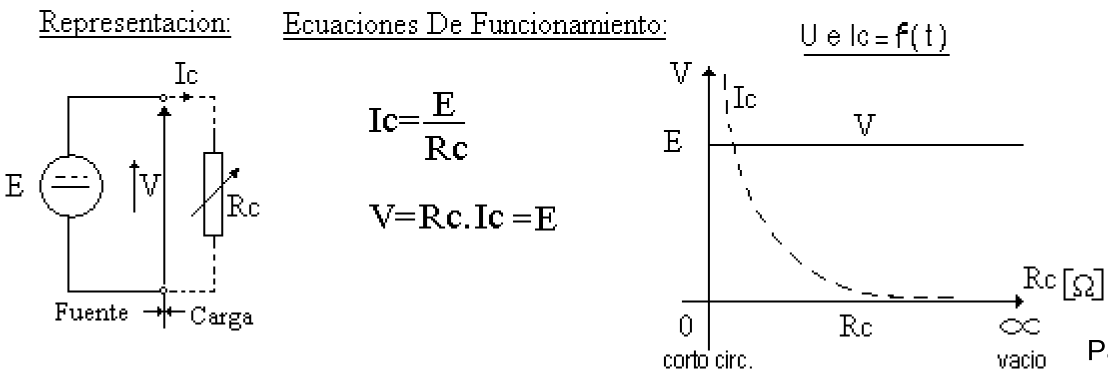
La conductibilidad, que es la inversa de la resistividad, vale:

$$\chi = \mathbf{57s}$$

<u>Fuentes de tensión ideales y reales.</u>

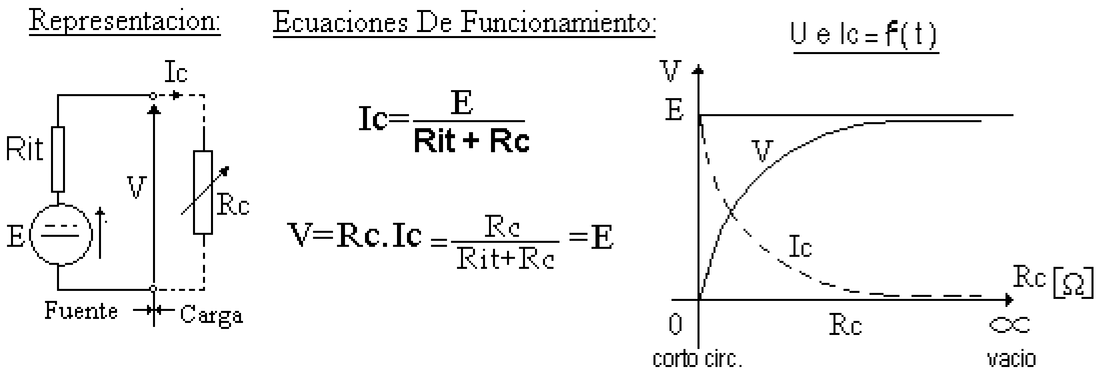
Fuente de tensión ideal:

A la tensión generada por una fuente de alimentación se la denomina, por razones históricas, fuerza electromotriz (abreviadamente fem y representada por la letra E).
En general a las fuentes de tensión se las representa con un generador conectado a un resistencia que se denomina resistencia interna de la fuente.
Si son de corriente continua tienen (fem E) constante y resistencia interna en serie, (R_{it}), nula.
Si son de corriente alterna, tienen f.e.m eficaz (E) constante e impedancia, (Z_{it}) nula (se verá luego la definición de fem eficaz e impedancia). Por tanto producen una tensión en bornes (V) independiente de la resistencia o impedancia de carga (Rc o Zc) y una corriente de carga (Ic) inversamente proporcional a ella.



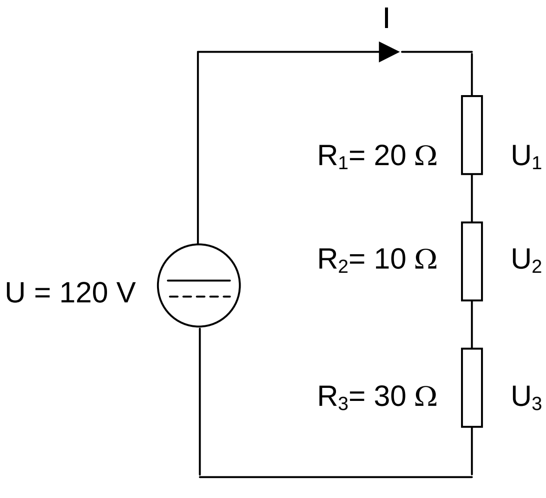
Fuentes de tensión real:

Poseen una fem constante si son de corriente continua o una fem eficaz constante si son de corriente alterna. La resistencia o impedancia interna no es nula. En consecuencia su tensión en bornes y la corriente de carga depende de (Rc o Zc).



Circuitos serie.

Un circuito conectado en serie es aquel en que la corriente total circula por cada uno de los componentes sin que exista ningún punto donde dicha corriente pueda bifurcarse hacia otros componentes.
En el siguiente esquema se observa un circuito compuesto por tres resistores conectados en serie al que se le aplica una tensión U = 120 V (a la tensiones se la suele simbolizar con la letra U a efectos de no confundirla con la unidad de tensión V).



Es evidente en un circuito en serie, que si la corriente tiene que atravesar indefectiblemente cada uno de los resistores la oposición ejercida por los tres resistores se sumaran. Por lo tanto:

$$R_{TOTAL} = R_1 + R_2 + R_3 = 20 + 10 + 30 = 60 \ \Omega$$

La corriente que atraviesa el circuito es, aplicando la ley de ohm:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{60} = 2 \text{ A}$$

Esta corriente es la que atraviesa cada uno de los componentes del circuito.

Por lo tanto se puede afirmar que:

La corriente que circula por un circuito en serie es igual en cualquier punto del circuito.

Cuando las cargas eléctricas atraviesan a los resistores disminuyen su energía potencial eléctrica. Es decir que se produce una "caída de potencial" que se puede evidenciar por el hecho de que el extremo por donde ingresa la corriente esta a mayor potencial (+) que el extremo por donde sale (-). La disminución de la energía potencial se explica por el hecho de que los resistores transforman la energía eléctrica en calor. La energía calórica generada se logra a expensas de una disminución de la energía potencial.
A la caída de potencial se la puede calcular aplicando la ley de ohm:

$$\mathbf{U_1 = I \times R_1 = 2 \times 20 = 40V}$$
$$\mathbf{U_2 = I \times R_2 = 2 \times 10 = 20V}$$
$$\mathbf{U_3 = I \times R_3 = 2 \times 30 = 60V}$$

Puede observarse que:

$$\mathbf{U = U_1 + U_2 + U_3 = 40 + 20 + 60 = 120}\ \mathrm{V}$$

O sea que la suma de las caídas de tensión en cada componente de un circuito en serie es igual a la tensión de la fuente.
La segunda ley de Kirchhoff establece:

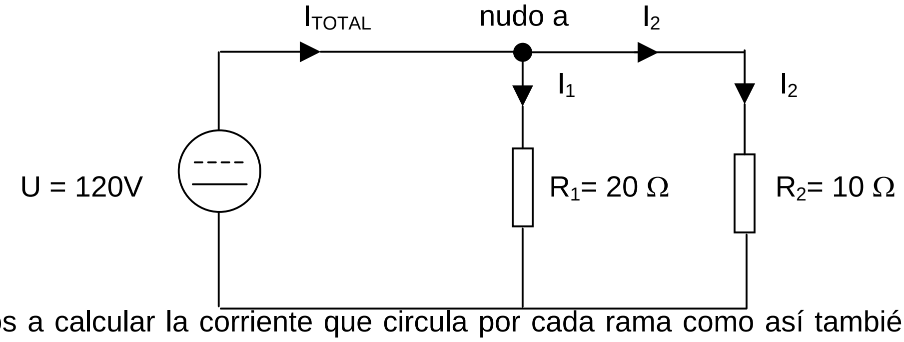
La suma de las caídas o variaciones de potencial en un circuito o malla cerrada es igual a cero.

Matemáticamente:

$$\mathbf{U + U_1 + U_2 + U_3 = 0}$$

Circuitos Paralelo.

Un circuito en paralelo esta constituido por ramas conectadas a un punto común. La tensión aplicada a los componente de cada rama es la misma, siendo la corriente circulante por cada una de éstas proporcional a su resistencia. En el siguiente esquema se observa un circuito en paralelo constituido por dos ramas al que se le aplica una tensión de 120 V.



Vamos a calcular la corriente que circula por cada rama como así también la total que circula por el circuito.
Teniendo en cuenta que la corriente total se divide (nudo a) en la corriente I1 e I2 es evidente que la oposición ofrecida por las resistencias conectadas en paralelo es menor que la menor de

las resistencia del circuito. Para determinar una expresión que nos permita calcular el valor de la resistencia total o equivalente en un circuito en paralelo aplicamos, una ves más, la ley de ohm:

$$U = I_{TOTAL} \times R_{TOTAL} = (I_1 + I_2) \times R = \left(\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \right) \times R_{TOTAL}$$

sacando factor común U:

$$U = I_{TOTAL} \times R_{TOTAL} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \times R_{TOTAL}$$

Simplificando U y despejando R_{TOTAL}:

$$R_{TOTAL} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Generalizando:

$$R_{TOTAL} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{R_n} \right)}$$

Para el caso del circuito en estudio, la resistencia total vale:

$$R_{TOTAL} = \frac{1}{\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right)} = 6{,}66\ \Omega$$

La corriente total vale:

$$I_{TOTAL} = \frac{U}{R_{TOTAL}} = \frac{120}{6{,}66} = 18{,}01 \text{ A}$$

en tanto que la corriente por cada rama vale:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{120}{20} = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}$$

La corriente total también puede obtenerse mediante:

$$I_{TOTAL} = I_1 + I_2 = 6 + 12 = 18 \text{ A}$$

Si asignamos un signo positivo a la corriente que entra en el nudo a y un signo negativo a la que sale puede escribirse que:

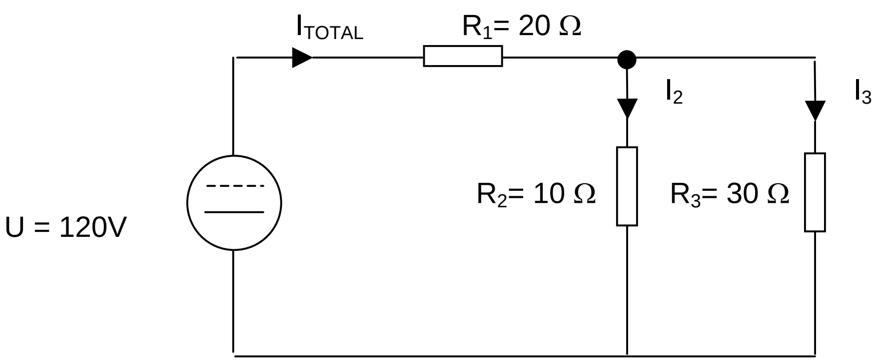
$$I_{TOTAL} - I_1 - I_2 = 0$$

Esta expresión resume la 1º Ley de Kirchhoff:

> *La suma de todas las corrientes convergentes (entrantes y silentes) a un nudo es igual a 0.*

<u>Circuitos serie – paralelo</u>

Estos circuitos están conformados por la conexión en serie y en paralelo de sus componentes. La metodología de su resolución se verá a través de un ejemplo.
Sea resolver el siguiente circuito:



$$R_{TOTAL} = R_1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = 20 + \frac{1}{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right)} = 27{,}5\,\Omega$$

$$I_{TOTAL} = \frac{U}{R_{TOTAL}} = \frac{120}{27{,}5} = 4{,}36 \text{ A}$$

$$U_1 = I_{TOTOL} \times R_1 = 4{,}36 \times 20 = 87{,}27V$$

$$U_{2,3} = U - U_1 = 120 - 87{,}27 = 32{,}73 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{32{,}73}{10} = 3{,}27 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{32{,}73}{30} = 1{,}09 \text{ A}$$

En la siguiente tabla se resumen los valores obtenidos:

Tensión	U_1	U_2	U_3	U_{TOTAL}
	87,27	32,73	32,73	120

Corriente	I_1	I_2	I_3	I_{TOTAL}
	4,36	3,27	1,09	4,36

Trabajo y Potencia

El trabajo eléctrico que realizan las cargas al atravesar un componente es directamente proporcional a la caída de potencial que experimentan. Si un resistor (o cualquier otro componente del circuito) experimenta una caída de tensión U cuando por el mismo circula, durante un determinado tiempo t, una corriente I, el trabajo realizado por las cargas eléctricas viene dado por:

$$W = U \times I \times t$$

en donde U esta en voltios, I en amper , t en segundos y W en Joule
El trabajo realizado por las cargas que circulan a través dl resistor se manifiesta como un aumento de temperatura de dicho resistor. Si en su lugar se encontrara un motor eléctrico el trabajo se manifestaría como energía mecánica en el eje dl motor.
Se define la potencia como el trabajo realizado en la unidad de tiempo, es decir:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \times I \times t}{t} = U \times I$$

en donde la potencia está expresada en watt.

Ley de Joule

El trabajo realizado por las cargas eléctricas que atraviesan una resistencia se transforma en calor.
El trabajo o, lo que es lo mismo, la energía disipada por una resistencia es:

$$Q = U \times I \times t$$

teniendo en cuenta que:

$$U = \frac{I}{R}$$

la expresión de Q queda:

$$Q = \frac{I}{R} \times I = I^2 \times R \times t$$

expresión ésta llamada **Ley de Joule**. Es frecuente expresar en la ley de Joule a Q en Calorías, para lo cual se debe multiplicar a la expresión anterior por el coeficiente 0,239, o sea:

$$Q = 0{,}239 I^2 \times R \times t$$

Rendimiento

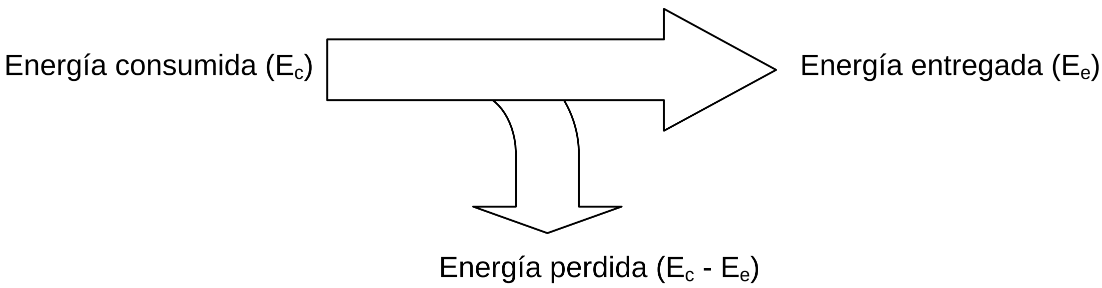
Durante la transformación de energía de una forma siempre se producen pérdidas. Así por ejemplo, de la energía eléctrica consumida por un motor, la mayor parte se transformará en energía mecánica en el eje y la restante en calor. Este calor será considerado, para este caso, como una perdida ya que nuestro objetivo es producir energía mecánica. En consecuencia podemos definir al rendimiento como:

$$\eta = \frac{Ee}{Ec}$$

de donde:

E_e : energía entregada
E_c : energía consumida
η: rendimiento (adimensional)

En la expresión del rendimiento también se puede utilizar la potencia entregada y cedida respectivamente. Gráficamente:

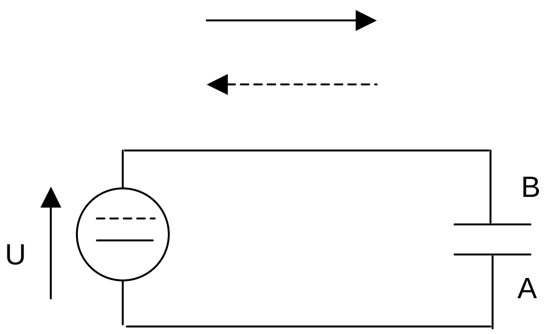


<u>Capacitores</u>

Si se dispone de dos placas conductoras (A y B) conectadas a los terminales positivo y negativo respectivamente de un fuente de alimentación y se las enfrenta una contra otra de modo que no se toquen pero que se influencien entre si se habrá constituido un capacitor. En estas condiciones, circulara una cierta cantidad de cargas desde la placa A terminal hacia el terminal positivo y la misma cantidad de cargas circulará desde la placa B al terminal negativo. Este pasaje de cargas de una placa a la otra, *que no es otra cosa que una corriente eléctrica*, durará hasta que las cargas acumuladas en las placas produzcan una diferencia de potencial igual a la diferencia de potencial de la fuente donde se encuentra conectado el capacitor. A este proceso se lo llama carga del capacitor.

carga

descarga



Es evidente, de lo expuesto, que la cantidad de carga acumuladas es proporcional a la tensión aplicada al capacitor, por lo tanto:

$$Q = CU$$

En donde la constante de proporcionalidad se denomina capacitancia o capacidad del capacitor. En la expresión anterior, la tensión U se expresa en Volt, la carga Q en Coulomb y la capacidad en “Faradios”. En general la unidad de capacidad es muy grande para los fines prácticos por lo que se utilizan los submúltiplos microfaradio y picofaradio.
Si luego de cargado un capacitor se lo desconecta de la fuente y se conectan las placas A y B mediante un cortocircuito en sus terminales circulará una corriente desde la placa B a la placa A durante un breve periodo de tiempo. La corriente cesará cundo las carga eléctricas se neutralicen, es decir que no exista diferencia de potencial entre ambas placas. A éste proceso e lo llama descarga del capacitor.

<u>Energía acumulada por un capacitor</u>

Para cargar un capacitor es necesario disponer de cierta energía para acumular las cargas en las placas o armaduras que constituyen el capacitor.
La energía utilizada para cargar el capacitor queda almacenada en el campo eléctrico que se establece entre las placas del capacitor en virtud de la diferencia de potencial generado por la cargas acumuladas. La cantidad de energía acumulada viene dada por:

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

en donde E está dado en Joules si C está en Faradios y U en Volt.

<u>Capacitor con dieléctrico</u>

La capacidad de un capacitor se verá notablemente aumentada si entre las placas del mismo se interpone un material aislante cualquiera. A éste material aislante se lo denomina dieléctrico. A la relación entre la capacidad del capacitor con dieléctrico y la capacidad del capacitor sin dieléctrico (dieléctrico de aire)se la denomina constante dieléctrica, o sea:

$$k = \frac{C_d}{C_0}$$

de donde:

C_d : capacidad del capacitor con dieléctrico

C_0 : capacidad del capacitor sin dieléctrico

En la siguiente tabla se resumen alguna constantes dieléctricas para distintos materiales:

Dieléctrico	**Constante dieléctrica**
Ámbar	2.7-2.9
Agua	80.08
Aire	1.00059
Alcohol	25.00
Baquelita	4-4.6
Cera de abejas	2.8-2.9
Glicerina	56.2

Helio	1.00007
Mica moscovita	4.8-8
Parafina	2.2-2.3
Plástico vinílico	4.1
Plexiglás	3-3.6
Porcelana electrotécnica	6.5
Seda natural	4-5

EL CAMPO MAGNÉTICO

Introducción

Es ampliamente conocido que un imán es capaz de atraer y retener trozos de hierro, el imán natural mas antiguo conocido es la magnetita (Fe_3O_4). Por convención se denomina a los extremos de todos los imanes como polos, cada imán tiene, de acuerdo con ello, un polo Norte y otro Sur. La experiencia demuestra que enfrentando dos imanes se verifica que **polos del mismo nombre se repelen y los de distinto nombre se atraen**.
Cada imán comunica al espacio que lo rodea un estado especial que se denomina **campo magnético**. Este campo no se puede percibir naturalmente, pero mediante pequeños trozos de hierro puede representarse de manera visible, observándose que se disponen en determinadas líneas denominadas **líneas de campo** o de fuerza. Las propiedades que se le asignan a las líneas son las siguientes:

- Las líneas de fuerza son círculos cerrados sin principio ni fin. Fuera del imán su dirección se fija del polo Norte al polo Sur.
- La densidad de las líneas de fuerza indica la intensidad del campo magnético.
- La entrada y salida de las líneas de fuerza en los trozos de hierro tienen lugar siempre perpendicularmente.

Magnitudes y unidades magnéticas

Las magnitudes que definen al campo magnético son:

- La inducción magnética "B" físicamente representa la densidad de líneas de fuerza y es la magnitud que caracteriza al campo magnético. Puede representarse, también, como el flujo magnético referido a la unidad de superficie. Su unidad es el Tesla [T] o Weber por metro cuadrado [Wb/m^2]
- El flujo magnético "ϕ" puede identificarse como la cantidad de campo presente en una superficie determinada. Su unidad es el Weber [Wb]
- La fuerza magneto-motriz o excitación "θ" es la magnitud que produce el campo magnético. Existen dos formas de generación de esta "tensión magnética", mediante imanes permanentes o mediante una corriente eléctrica. Su unidad es el Ampere-vuelta [Av]
- La intensidad de campo magnético "H" es la caída de "tensión magnética" por unidad de longitud. Su unidad es el Ampere-vuelta por metro [Av/m].
- La reluctancia "$\Re$" que puede representarse como la resistencia que opone un cuerpo o medio al establecimiento de un flujo magnético. Su unidad es uno sobre Henry [H^{-1}].

Las expresiones que relacionan estas magnitudes son:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}$$

$$\theta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{I}}{\mathbf{l}}$$

$$\Re = \frac{\mathbf{l}}{\mu\mu_0 \mathbf{S}}$$

siendo:
μ_0: permeabilidad absoluta del vacío
μ: permeabilidad relativa del material del núcleo
$\mu\mu_0$: permeabilidad absoluta del material del núcleo
ds: diferencial (cantidad infinitamente pequeña) de superficie (transversal al campo)
N: número de vueltas (o espiras) de la bobina

I: corriente que circula por el conductor o bobina
l: longitud del campo magnético.
S: superficie (transversal al campo)

El campo magnético generado por una corriente

Toda circulación de corriente eléctrica va acompañada de un campo magnético que la circunda. Tomando el ejemplo de un conductor redondo, infinitamente largo, las líneas de fuerza en este caso formarán círculos concéntricos en torno al conductor. La dirección de estas líneas se puede determinar por la **regla del sacacorchos: si la corriente circula en el sentido de avance de un sacacorchos, el sentido de giro del mismo indica la dirección del campo**. En la figura Nº 1 se puede observar el conductor y las líneas de campo producidas por la circulación de una corriente cuyo sentido es hacia el interior del dibujo.

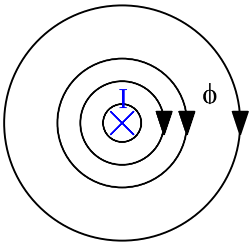
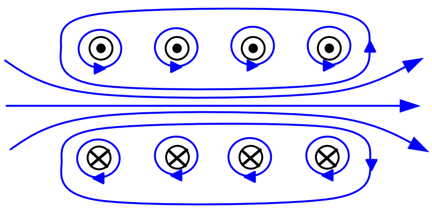


Figura Nº 1: Campo producido por un conductor redondo rectilíneo

Para determinar la densidad B de líneas de fuerza en un punto cualquiera, partimos de la expresión de inducción vista anteriormente:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \cdot \mathbf{H} = \mu\mu_0 \cdot \frac{\theta}{\mathbf{l}} = \mu\mu_0 \cdot \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{I}}{2\pi \mathbf{r}}$$

Es decir que, genéricamente podemos expresar que el valor de campo disminuye al aumentar la distancia al conductor por el cual circula la corriente que lo produce.
En el caso de una bobina arrollada en forma de solenoide, los campos concéntricos de los diversos conductores de cada espira se componen para dar un campo total como el que se muestra en la figura Nº 2



El Campo se extiende esencialmente en sentido axial y se dispersa hacia afuera por las superficies frontales. Si el solenoide es muy largo y delgado, el campo puede considerarse homogéneo en su interior, a excepción de las superficies frontales.

Ley de Faraday. Ley de Lenz

La inducción electromagnética es el principio sobre el que se basa el funcionamiento del generador eléctrico, el transformador y muchos otros dispositivos. Supongamos que se coloca una espira en una región en la que hay un campo magnético. Si el flujo ϕ a través de la espira varía con el tiempo, al cerrar el circuito se puede observar una corriente la misma (mientras el flujo está variando). Midiendo la fem inducida se encuentra que depende de la rapidez de variación del flujo del campo magnético con el tiempo. La **ley de Faraday** nos dice, entonces, que en una espira que está en presencia de un campo magnético, al producirse una variación relativa entre ambos, se induce en la espira una fuerza electromotriz dada por la siguiente relación:

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

El significado del signo menos, es decir, el sentido de la corriente inducida (ley de Lenz) se muestra en la figura Nº 3 mediante una flecha de color azul.

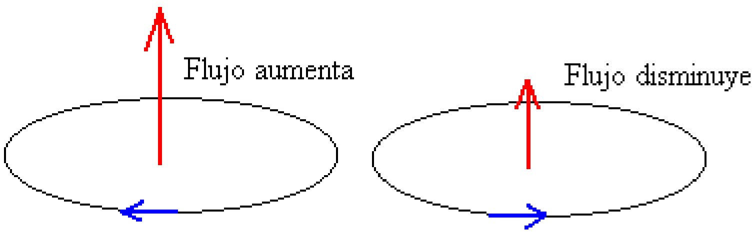


Figura Nº 3 Sentido de la corriente inducida según la ley de Lenz

Interpretando la gráfica anterior podemos decir que si el flujo aumenta inducirá una fuerza electromotriz que generará una corriente tal que genera un flujo de sentido contrario al original. Si el flujo disminuye, esta corriente tendrá un sentido tal que generará un flujo de igual sentido que el original. La **Ley de Lenz** indica, entonces conceptualmente, que **la fuerza electromotriz inducida es de dirección tal que, la corriente que genera se opone a la causa que la produce**.

Inductancia

Si generalizamos la expresión de la fuerza electromotriz inducida a un número N de espiras de una bobina, la misma estará dada por:

$$e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

De las expresiones vistas inicialmente para las magnitudes magnéticas podemos expresar lo siguiente:

$$d\phi = d(B \cdot S) = d(\mu\mu_0 \cdot H \cdot S) = d\left(\mu\mu_0 \cdot \frac{\theta}{l} \cdot S\right) = d\left(\frac{N \cdot i}{\Re}\right)$$

Por lo tanto la expresión de la fuerza electromotriz inducida quedará de la siguiente forma:

$$e = -\frac{N^2}{\Re} \cdot \frac{di}{dt}$$

El valor $L = \frac{N^2}{\Re} = N^2 \mu\mu_0 \frac{S}{l}$ se denomina coeficiente de autoinducción o inductancia L y su unidad es el Henry [H]. Considerando este coeficiente, podemos escribir la expresión de la fuerza electromotriz inducida de la siguiente forma:

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

La inductancia de una bobina depende, entonces, del número de vueltas, del material del núcleo y de las dimensiones de la misma.

Energía almacenada en el campo magnético.

Conocidos los valores de inductancia y de la corriente que circula por una bobina, la energía acumulada en el campo magnético de esa bobina o de un circuito inductivo estará dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{W = 1/2\ L\ I^2}\ \text{[J] (joules)}$$

Donde
L = Inductancia en Henry
I = Corriente en amperes.

Generador elemental de corriente alterna

El generador de corriente alterna es un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. El generador más simple consta de una espira rectangular que gira en un campo magnético uniforme.
El movimiento de rotación de las espiras es producido por ejemplo, el movimiento de una turbina accionada por una corriente de agua en una central hidroeléctrica, o por un chorro de vapor en una central térmica. En el primer caso, una parte de la energía potencial agua embalsada se transforma en energía eléctrica; en el segundo caso, una parte de la energía química se transforma en energía eléctrica al quemar carbón u otro combustible fósil.
Cuando la espira gira, el flujo del campo magnético a través de la superficie de la espira cambia con el tiempo. Se produce una fuerza electromotriz inducida. Los extremos de la espira se conectan a dos anillos que giran con la espira, tal como se ve en la figura. Las conexiones al circuito externo se hacen mediante escobillas (contactos que rozan con los anillos) estacionarias en contacto con los anillos.

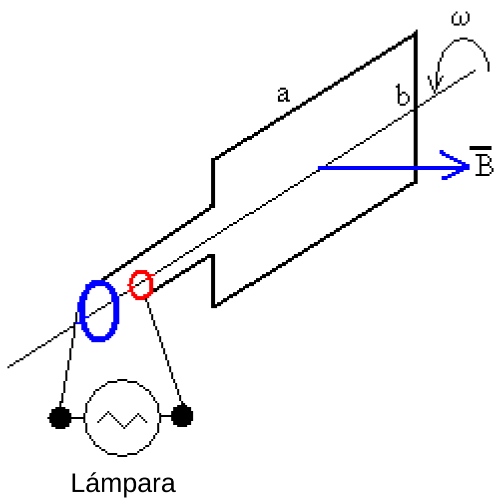


Figura Nº 4: Generador elemental

Si conectamos una lámpara al generador veremos que por el filamento de la lámpara circula una corriente que hace que se ponga incandescente, y emitirá tanta más luz cuanto mayor sea la velocidad con que gira la espira en el campo magnético.

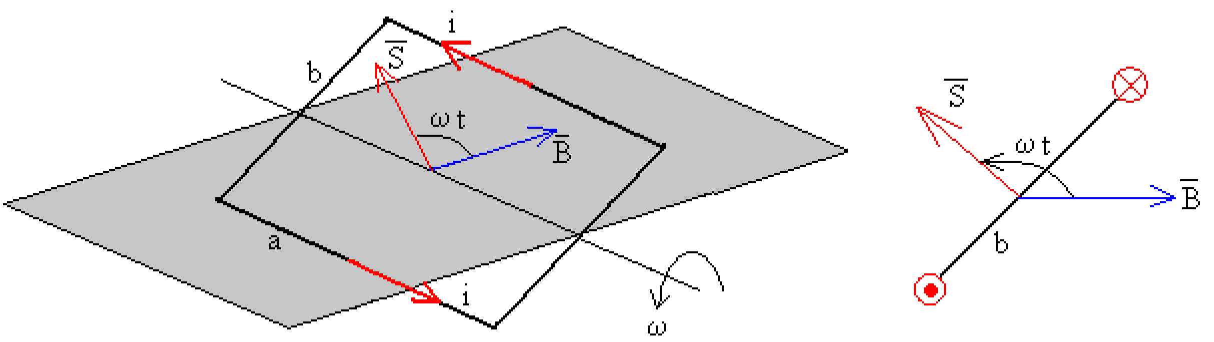


Figura Nº 5: Representación de la ley de Faraday y la Ley de Lenz

Supongamos que la espira gira con velocidad angular constante ω.Al cabo de un cierto tiempo $\mathbf{t}$ el ángulo que forma el campo magnético y la perpendicular al plano de la espira es ω $\mathbf{t}$. El flujo del campo magnético $\mathbf{B}$ a través de una espira de área $\mathbf{S}$ es:

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \cdot \cos(\omega\, t)$$

La fuerza electromotriz inducida en la espira será, entonces:

$$\mathbf{e} = -\frac{d\phi}{dt} = \omega \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{sen}(\omega t)$$

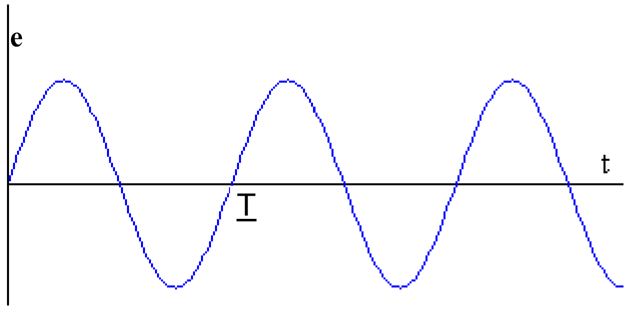


Figura Nº 6: Variación senoidal de la fuerza electromotriz inducida

La fuerza electromotriz (fem) $\mathbf{e}$ varía sinusoidalmente con el tiempo, como se muestra en la figura. La fem alcanza su valor máximo en valor absoluto cuando $\omega\mathbf{t}=\mathbf{T}/\mathbf{2}$ ó $\mathbf{3T}/\mathbf{2}$, cuando el flujo ϕ es mínimo (el campo magnético está en el plano de la espira), y es nula cuando $\omega\mathbf{t}$ = **0 o** $\mathbf{T}$, cuando el flujo es máximo (el campo magnético es perpendicular a la sección de la espira).
Aplicando la ley de Lenz podemos determinar el sentido de la corriente inducida. Esta corriente deberá oponerse a la causa que la produce, por lo tanto tendrá una variación senoidal de sentido tal que produzca un campo opuesto a la variación de campo en la espira. En un instante dado se puede representar vectorialmente según lo indicado en la figura Nº 5

PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UNA CORRIENTE ALTERNA

Introducción

Retomando los conceptos desarrollados en el generador elemental de corriente alterna, la expresión de la fuerza electromotriz inducida en una espira que gira a velocidad angular uniforme ω, dentro de un campo magnético, también uniforme, de inducción **B**, estaba dada por la expresión:

$$\mathbf{e} = -\frac{d\phi}{dt} = \omega \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

Si en lugar de una espira tenemos una bobina de **N** vueltas, en la cual el valor máximo del flujo que intercepta la bobina cuanto su sección es perpendicular a la dirección del campo está dado por: $\phi_{max} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$, la expresión de la f.e.m. puede expresarse como:

$$\mathbf{e} = \omega \cdot \mathbf{N} \cdot \phi_{max} \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

El valor máximo de **e** estará dado, entonces en el instante antes descripto y podrá expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_{max} = \omega \cdot \mathbf{N} \cdot \phi_{max}$$

Parámetros característicos

Para definir con claridad un proceso de forma sinusoidal, hacen falta ciertos valores determinantes:

La amplitud (valor máximo, de pico o de cresta): representa el valor máximo de la función seno. Como es independiente del tiempo se la designa con una letra mayúscula con el subíndice max, tal como lo expresa la expresión vista anteriormente.

Período: es el tiempo (en segundos) que abarca una onda completa de la senoide y se designa con la letra **T**. Generalmente es emplea la inversa del período, definida a continuación.

La frecuencia: es el número de períodos por segundo o la velocidad angular por cada vuelta completa de una bobina. Se designa con la letra **f** y su unidad es el [Hz]=[s^{-1}].

Cabe destacar que las ondas senoidales son funciones periódicas, ya que se repiten en el tiempo en forma regular con la misma amplitud y frecuencia. Matemáticamente puede expresarse como:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ángulo de fase: es el ángulo formado entre un punto 0 (t=0) fijado arbitrariamente y el paso por cero hacia el sentido positivo de la función seno.

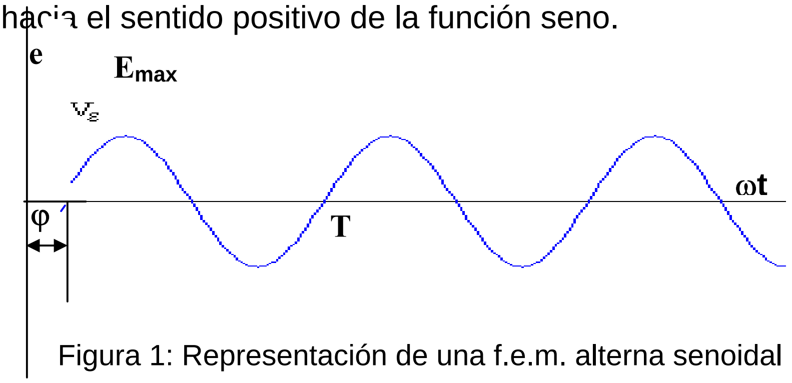


Figura 1: Representación de una f.e.m. alterna senoidal

Valor eficaz

Muchos de los instrumentos de medida que se utilizan, no pueden captar un valor especial instantáneo, como es el máximo, sino un valor "medio". El más utilizado, por su significado eléctrico, es el valor eficaz.

Matemáticamente se define como la raíz cuadrada del valor medio de la función al cuadrado en un periodo. Planteándolo en una forma general tendríamos:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(y(t)\right)^2 .dt}$$

Planteándolo para la función senoidal de una fem y de una corriente nos quedaría lo siguiente:

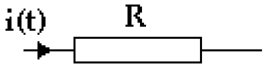
$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{E}_{\max}\cdot \mathbf{sen}(\omega \mathbf{t})\right)^2 .\mathbf{dt}}$$

$$\mathbf{I} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{I}_{\max}\cdot \mathbf{sen}(\omega \mathbf{t})\right)^2 .\mathbf{dt}}$$

En ingles se denomina: “Root Mear Square value”. (raíz de la media cuadrática) y se representa con el subíndice (RMS).

Eléctricamente, el valor eficaz de una corriente periódica representa el equivalente al de una corriente continua que, al circular por la misma resistencia que la corriente periódica, disipa la misma potencia. Esto se puede demostrar de la siguiente manera

Corriente Periódica:

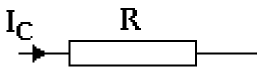


Potencia instantánea disipada $P = R[i(t)]^2$

Potencia Media disipada en 1 periodo: $P = R\left(\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2 .dt\right)$

De acuerdo a la expresión del valor eficaz de una corriente senoidal $P = R.I^2$

Corriente Continua:



Pot. Disip. Constante: $P = R.(I_C)^2$

Si ambas potencias son iguales: $I = I_C$

Como ya se mencionó, el valor eficaz es el que indican los amperímetros y voltímetros, de corriente alterna.

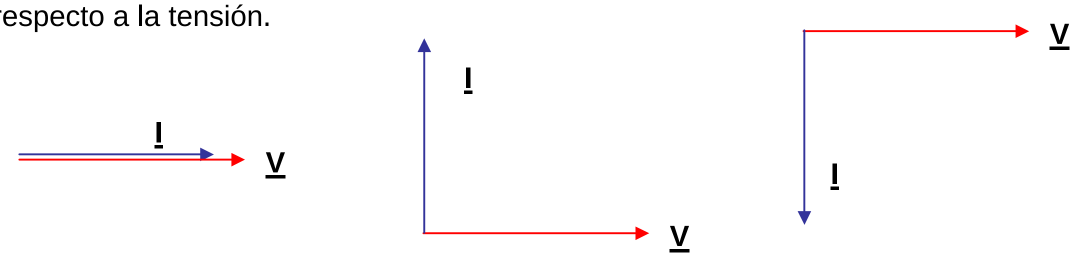
Si resolvemos las ecuaciones planteadas para los valores eficaces de una función alterna senoidal obtenemos que la relación entre el valor eficaz y el valor máximo es el siguiente:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_{\max}}{\sqrt{2}}$$

En general, cuando la tensión aplicada y la corriente permanente en un circuito son Senoidales se representa a igual escala de tiempo o de ángulo de fase, $(\omega.t)$, muestra un desplazamiento entre ellas que se denomina **“desfase”** y se mide en tiempos o en angulos. Este desfase, que se representa por (φ), nunca excede de $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}[\mathbf{rad}]$. Y se describe casi siempre diciendo como esta **(i)** respecto a **(v),** por ejemplo la corriente esta adelantada respecto a la tensión $\pi/2$; la corriente atrasa respecto a la tensión $\pi/4$; la corriente esta en fase con la tensión, etc.

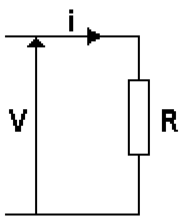
Representación fasorial de una corriente alterna

La utilización de funciones del tiempo de una magnitud alterna formando un diagrama lineal presenta, a pesar se su aparente claridad, notables dificultades, en especial cuando los circuitos se hacen más complejos. Por esta razón se utiliza mayormente el sistema de representación fasorial similar al sistema de representación vectorial. Frecuentemente se trazan los diagramas vectoriales que representan los valores eficaces de las funciones. Para que los ángulos de desfase entre varios vectores tengan en cada instante el mismo valor, se representarán solamente en un mismo diagrama las magnitudes alternas que tengan la misma frecuencia.
Como ejemplo se representar la corriente y la tensión en un circuito en que ambas magnitudes están en fase, la corriente atrasada 90º respecto a la tensión y la corriente adelantada 90 º respecto a la tensión.

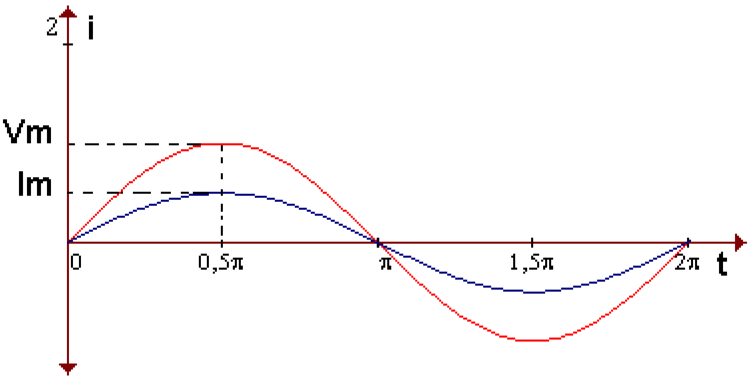


a) **I** y **V** en fase b) **I** atrasada 90º respecto a **V** c) **I** adelantada 90º respecto a **V**
Figura 2: Representación de desfases entre magnitudes de la misma frecuencia

Circuito Con Resistencia Únicamente:



Si le aplicamos una tensión $v = Vm.sen(\omega.t)$ circulara por él una corriente $\boxed{i = \frac{V}{R} = \frac{Vm}{R}\,sen(\omega.t)}$ con un valor máx. $\mathrm{Im} = \frac{Vm}{R}$, que esta en fase con la tensión.

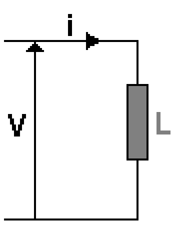


Vemos, pues, que la resistencia solo limita el valor máximo de la corriente pero no produce ningún desfase de la misma.
El valor eficaz de **(i)** viene dado por: $I = \frac{Vm}{\sqrt{2}.R} = \frac{V}{I}$.

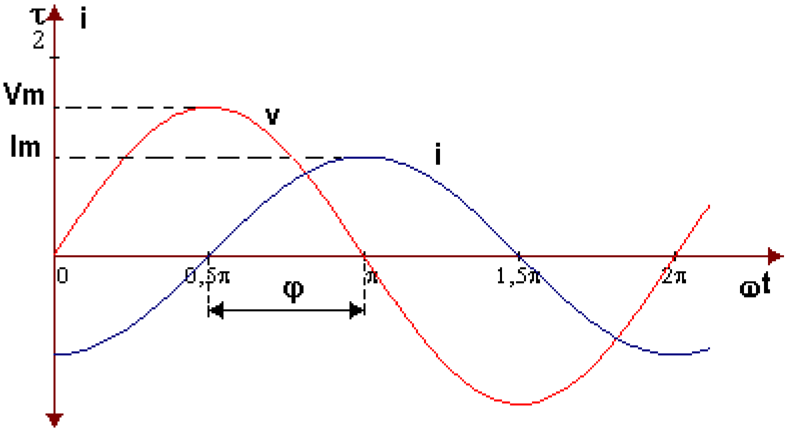
Esta formula es similar a la de la corriente continua; y la impedancia del circuito será en este caso, por $\boxed{Z = \frac{Vm}{\mathrm{Im}} = \frac{V}{I} = R}$. El desfase es, $\varphi = 0$.

El diagrama vectorial será el indicado en la Figura 2 a.

Circuito con inductancia únicamente



Al aplicarle una tensión $v = Vm.sen(\omega.t)$ aparece en él , según tabla 2, una corriente $\boxed{i = \frac{1}{L}\int v.dt = \frac{Vm}{\omega.L}(-\cos\omega.t) = \frac{Vm}{\omega.L}.sen\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)}$ de valor máximo $\quad \mathbf{Im} = \dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\boldsymbol{\omega.L}}$ y atrasada $1/4$ de periodo respecto a la tensión.



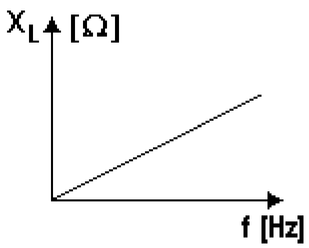
En consecuencia la inductancia no solo limita la amplitud de la corriente a través del termino $\boldsymbol{\omega.L} = \boldsymbol{XL}$, llamado <u>"reactancia inductiva"</u>, sino que la coloca en cuadratura atrasada.

El valor eficaz de la corriente es: $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\mathbf{Im}}\dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\sqrt{2}\boldsymbol{\omega.L}} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{\omega.L}} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{XL}}$ y la impedancia introducida por la inductancia: $\boxed{\boldsymbol{Z} = \dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\mathbf{Im}} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{\omega.L} = \boldsymbol{XL}\ [\Omega]}$.

En efecto $[\boldsymbol{Z}] = [\boldsymbol{\omega}].[\boldsymbol{L}] = \dfrac{1}{\boldsymbol{seg}}.\dfrac{\boldsymbol{Y.\,seg}}{\mathbf{A}} = [\Omega]$. En cuanto al desfase, resulta como se ha dicho $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

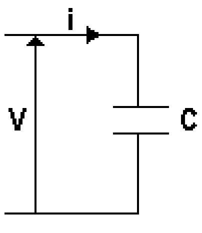
Se representa vectorialmente como se indica en la figura 2 b.

Poniendo $\omega = 2\pi.\boldsymbol{L.f}$ en la expresión de **(X_L)**, se encuentra que $\boxed{\boldsymbol{XL} = 2\pi.\boldsymbol{L.f}}$ crece linealmente con la función de la tensión aplicada (Fig. 3); es decir, que con ella disminuye el valor máximo y eficaz de la corriente a igual valor máximo de la tensión.



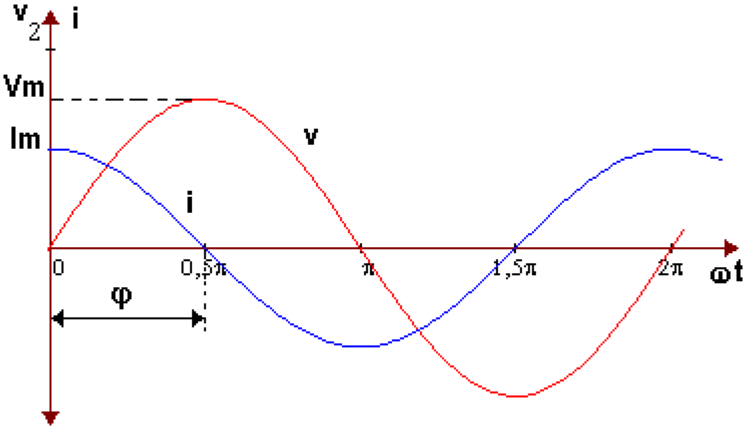
<u>Circuito con capacitancia únicamente</u>

Cuando se le aplica una tensión $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Vm.sen}(\boldsymbol{\omega.t})$ circula por él, según tabla 2, una corriente



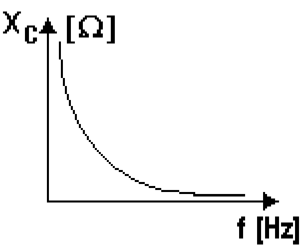
$\boxed{\boldsymbol{i} = \boldsymbol{C}.\dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\omega.C.Vm}.\cos(\boldsymbol{\omega.t}) = \dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\dfrac{1}{\boldsymbol{\omega.C}}}\boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{\omega.t} + \dfrac{\pi}{2}\right)}$ con un valor máximo $\mathbf{Im} = \dfrac{\boldsymbol{Vm}}{\dfrac{1}{\boldsymbol{\omega.C}}}$, y delante de $1/4$ de periodo respecto a la tensión.

Así que la capacidad ademas de limitar el valor máximo de la corriente mediante el termino $\boxed{XC = \frac{1}{\omega . C}}$, denominado reactancia capacitiva, la sitúa en cuadrante adelantada.



La corriente eficaz vale en este circuito: $I = \frac{\text{Im}}{\sqrt{2}} = \frac{Vm}{\sqrt{2}\,\frac{1}{\omega . C}} = \frac{V}{\frac{1}{\omega . C}} = \frac{V}{XC}$ y la impedancia del mismo: $\boxed{Z = \frac{Vm}{\text{Im}} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\omega . C} = XC\,[\Omega]}$. Puesto que: $[Z] = \frac{1}{[\omega][C]} = \frac{1}{seg\,\frac{A.seg}{V}} = [\Omega]$.

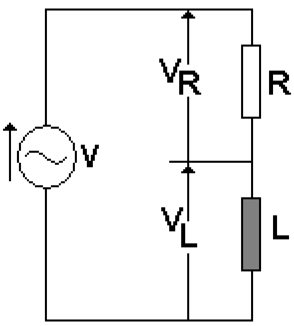
El desfase es, según se ha explicado, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ y su representación vectorial es la indicada en la figura 2 c.



Expresando **(X_C)** en función de **(t)**, se halla que $\boxed{XC = \frac{1}{2\pi f . C}}$ de donde se obtiene que $XC . f = \frac{1}{2\pi . C} = const.$ ecuación que muestra que la reactancia capacitiva disminuye hiperbólicamente con la con la función de la tensión aplicada; o sea que con ella crece el valor máximo y eficaz de la corriente a igual **(Vm)**.

<u>Circuito con resistencia e inductancia un serie</u>

Puede servir para representar una bobina real con <u>núcleo de aire o no magnético</u>, que produce campo magnético y calor; es decir una bobina con perdidas por efecto Joule en la resistencia del arrollamiento o, en general para indicar la presencia de elementos resistivos e inductivos en un circuito. Es importante destacar que en una bobina real la resistencia y la inductancia no se hallan localizada en diferente lugar como muestra la Figura.



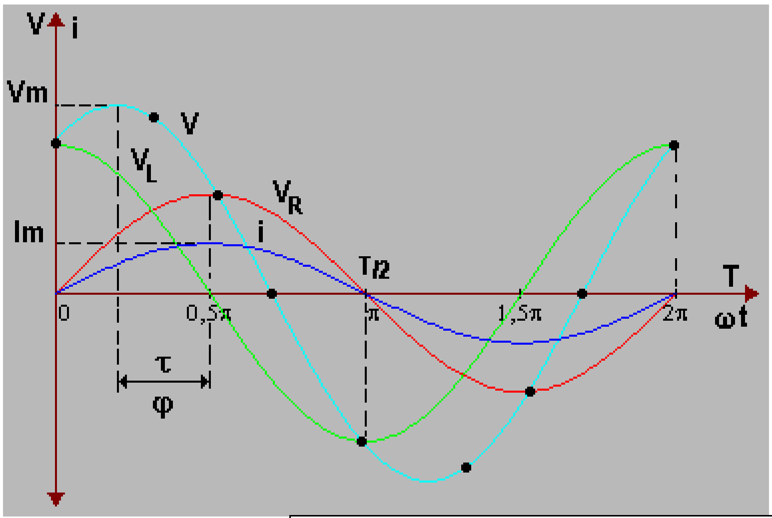
Por consiguiente no siempre las tensiones **(V_R)** y **(V_L)** pueden medirse independientemente supongamos que el aire está recorrido por una corriente alterna. $\boxed{i = \text{Im} . sen(\omega . t)}$ y hallaremos las tensiones **(V)** que la origina. Aplicando la segunda ley de Kirchhof se obtiene que: $V = VR + VL$ y reemplazando **(V_R)** y **(V_L)**

$$V = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Esto implica que, implica

$\boxed{V = R\mathrm{Im}.sen(\omega.t) + \omega.L\mathrm{Im}.\cos(\omega.t)}$

expresión según la cual **(V)** es la suma de dos funciones Senoidales : **(V_R)** en fase con **(i)** y **(V_L)** adelantada con respecto a **(i)**, $\frac{\pi}{2}$.



Efectuando esta suma gráficamente <u>punto por punto</u> (Fig. 2), se observa que es otra función senoidal de igual periodo que las sumadas y por tanto de igual frecuencia e igual pulsación, adelantada un ángulo (φ) respecto a la corriente, y con un valor máximo **(Vm)**.

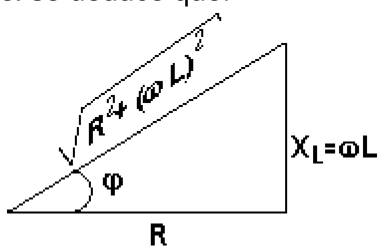
Por eso puede escribirse que $\boxed{v = Vm.sen(\omega.t + \varphi)}$.

Donde **(Vm)** y (φ) son los únicos valores a determinar. Desarrollando el seno de la suma: $\boxed{V = Vm.sen(\omega.t).\cos(\varphi) + Vm.sen(\varphi).\cos(\omega.t)}$.

Luego, para que se cumpla la primera expresión deben ser iguales los coeficientes de $sen(\omega.t)$ y $\cos(\omega.t)$.

O sea: $\begin{cases} \mathrm{Vm.sen}(\varphi) = \omega.\mathrm{L\,Im} \\ \mathrm{Vm.cos}\ (\varphi) = \mathrm{R\,Im} \end{cases}$ dividiendo m. a m. Implica $\boxed{\mathrm{Tg}(\varphi) = \frac{\omega.\mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{XL}}{\mathrm{R}}}$

Expresión que permite calcular (φ) y representado por el triangulo rectángulo de la figura 3 de él se deduce que:



$\cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega.L)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (XL)^2}}$ y reempl. En

$\boxed{\mathrm{Vm} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + (\omega.\mathrm{L})^2}.\mathrm{Im} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{XL}^2}.\mathrm{Im}}$.

Formula que da la amplitud de la tensión aplicada. Reemplazando se encuentra finalmente que el valor instantáneo de esa tensión es: $\boxed{V = \sqrt{R^2 + (\omega.L)^2}.\mathrm{Im}.sen\left(\omega.t + arc\,tg\frac{\omega.L}{R}\right) \quad (8)}$. La impedancia del circuito se deduce de (7) y vale $\boxed{Z = \frac{Vm}{\mathrm{Im}} = \sqrt{R^2 + (\omega.L)^2} = \sqrt{R^2 + XL^2} \quad [\Omega] \quad (9)}$. Hallándose representada por la hipotenusa del triangulo dibujado anteriormente, llamado por eso **"triangulo de impedancia"**. Dividiendo numerador, y el denominador de por $\sqrt{2}$ para introducir la tensión y la corriente eficaz se encuentra que $\boxed{\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{I}} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{Z.I}\ ; \quad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}}}$.

Formula que constituye la expresión de la ley de **(ohm)** para este circuito.

Si $R >> L$; $\frac{\omega.L}{R} \to 0$, $\varphi \to 0$, $Z \to R$ y $V \to R.\mathrm{Im}.sen(\omega.t)$ porque el circuito es casi una resistencia pura.

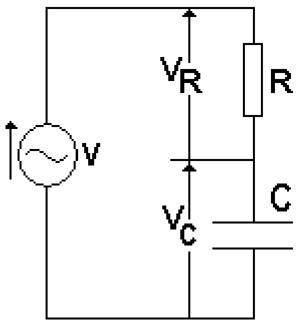
Si $\omega.L >> L$; $\frac{\omega.L}{R} \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $Z \rightarrow \omega.L$ y $V \rightarrow \omega.L.\mathrm{Im}.sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$ porque el circuito es casi una inductancia pura.

Como colorario del razonamiento precedente agregamos que en un circuito serie **(RL)** (o en un inductor con perdida y núcleo magnético) la corriente atrasa de un ángulo $\boxed{\varphi = arc\,tg\left(\frac{XL - Xc}{R}\right) < 90°}$ respecto a la tensión y adquiere un valor eficaz $\boxed{I = \frac{V}{Z}}$, siendo la impedancia $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega.t)^2}}$.

<u>Circuito con resistencia y capacitancia en serie</u>

Se puede emplear para modelar con elementos puros un capacitor real, esto es con pérdidas en el dieléctrico o en general, para representar circuitos con componentes capacitivos y resistivos, tal como el circuito serie (RL).

Admitamos que circula una corriente alterna $i = \mathrm{Im}.sen(\omega.t)$ y hallamos la tensión **(V)** que la produce.



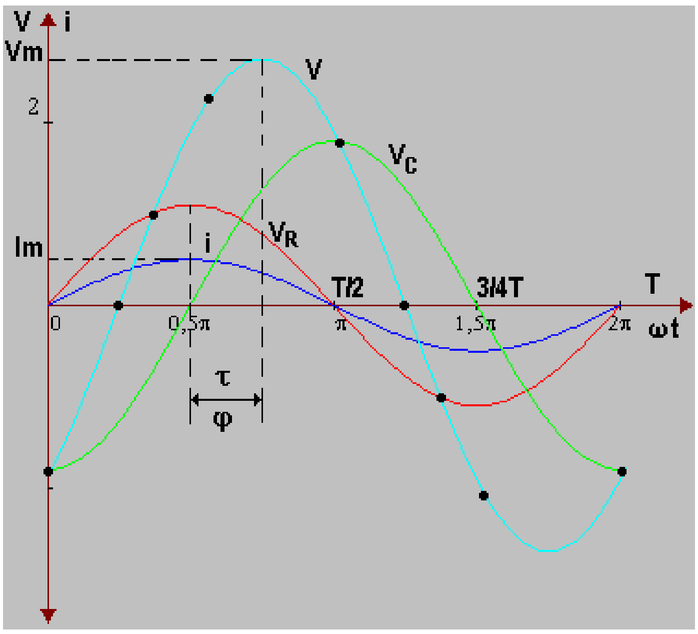
Aplicando la segunda ley de Kirchhof se encuentra que:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V_R} + \mathrm{V_C}$$

$$= \mathrm{R.i} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int \mathrm{i.dt}$$

$$= \mathrm{R.Im.sen}(\omega.\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{Im}}{\omega.\mathrm{C}}\cos(\omega.\mathrm{t})$$

expresión en la que se observa que **(V)** es la suma de la tensión **(V_R)** en fase con **(i)** y la tensión **(V_C)** en cuadrante adelantada respecto a **(i)**. Realizándola otra vez gráficamente <u>punto a punto</u>, se ve que **(V)** es otra función senoidal de igual periodo, frecuencia y pulsaciones que **(V_R)** y **(V_C)**, atrasada de un tiempo (t) y un ángulo (φ) respecto a la corriente y con un valor máximo **(Vm)**.



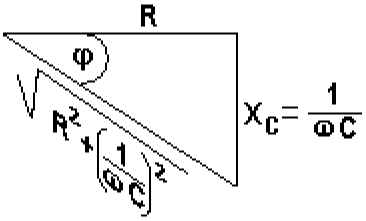
Por consiguiente puede escribirla $V = Vm.sen(\omega.t - \varphi)$, donde **(Vm) y** (φ) son valores a determinar, desarrollando el seno de la diferencia e igualando después los coeficientes de $sent(\omega.t)$ y del desarrollo,

$$V = Vm.sen8\omega.t).\cos(t) - Vm.sen(t).\cos(\omega.t)\ \ (3)\ ,\ \Rightarrow \qquad \begin{aligned} -\mathbf{Vm.sen}(\varphi) &= -\frac{\mathbf{Im}}{\omega.\mathbf{C}} \\ \mathbf{Vm}.\cos(\varphi) &= \mathbf{R.Im} \end{aligned}$$

dividiendo m. a m. implica:

$$\boxed{\mathbf{tg} = \frac{\frac{1}{\omega.\mathbf{C}}}{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{Xc}}{\mathbf{R}}}$$

formula que permite calcular el desfase (φ) de la tensión, así como representarlo por el triangulo de la Figura.



Del cual se deduce que $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega.C}\right)^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + XC^2}}$,

y reemplazando se obtiene el valor máximo de **(V)**.

$$\boxed{Vm = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega.C}\right)^2}\,.\mathbf{Im} = \sqrt{R^2 + XC^2}\,.\mathbf{Im}}\ .$$

Sustituyendo ahora, se encuentra el valor instantáneo de la tensión aplicada.

$$\boxed{\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \left(\frac{1}{\omega.\mathbf{C}}\right)^2}\,.\mathbf{Im}.\mathbf{sen}\left(\omega.\mathbf{t} - \mathbf{arctg}\frac{1/\omega.\mathbf{C}}{\mathbf{R}}\right)}$$

, donde la impedancia del circuito vale:

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Vm}}{\mathbf{Im}} = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \left(\frac{1}{\omega.\mathbf{C}}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \mathbf{XC}^2}\quad [\Omega]}$$

y esta representada por la hipotenusa del triangulo rectángulo dibujado procedentemente, el cual constituye el triangulo de impedancia del circuito serie **(RC)**.

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{2}$ se encuentra que:

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{Z.I}\ \ \mathbf{e}\ \ \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} \qquad \mathbf{(10)}}$$

expresión de la ley de **(ohm)** para este circuito.

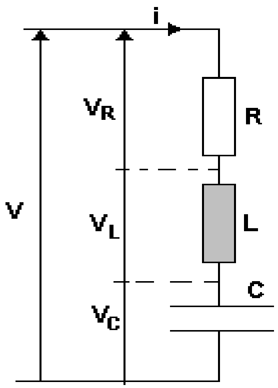
Si $R >> \dfrac{1}{\omega.C}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{\omega.C}}{R} \to 0\ ,\ \varphi \to 0\ ,\ Z \to R\ y\ \ V \to R.\mathrm{Im}\,.sen(\omega.t)$

Porque el circuito es casi una resistencia ideal.

Si $\dfrac{1}{\omega.C} >> R\ ;\ \dfrac{\frac{1}{\omega.C}}{R} \to \infty\ ,\ \varphi \to -\dfrac{\pi}{2}\ ,\ Z \to \dfrac{1}{\omega.C}\ \ y\ \ V \to \dfrac{\mathrm{Im}}{\omega.C}.sen\left(\omega.t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Porque el circuito es casi un capacitor ideal.

Como consecuencia de lo expuesto diremos que en un circuito serie **(RC)** (o en un capacitor con perdidas dieléctricas) la corriente adelanta un ángulo $\boxed{\varphi = arc\,tg\left(\dfrac{XL - Xc}{R}\right) < 90°}$ y toma un valor eficaz $\boxed{I = \dfrac{V}{Z}}$, siendo la impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega.C}\right)^2}$.



Circuito con resistencia, inductancia y capacitancia en serie

Puede representarse la conexión en serie de una bobina real y una Capacitancia ideal o real, la resistencia coincidirá pues con la del

arrollamiento de la bobina o con ésta mas la resistencia de perdida del capacitor, o sumará una resistencia pura presente en el circuito.
Si circula una corriente alterna $i = \mathrm{Im}\,.sen(\omega.t)$, aplicando la segunda ley de kirchhof se encuentra que la tensión aplicada vale:

$$
\begin{aligned}
v = \quad & V_R \quad + \quad V_L \quad + \quad V_C \\
= \quad & R.i \quad + \quad L\frac{di}{dt} \quad + \quad \frac{1}{C}\int i.dt \\
= \quad & R.\mathrm{Im}\,.sen(\omega.t) + \omega.L.\mathrm{Im}\,.\cos(\omega.t) + \frac{\mathrm{Im}}{\omega.C}\cos(\omega.t) \\
= \quad & R.\mathrm{Im}\,.sen(\omega.t) + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right).\mathrm{Im}\,.\cos(\omega.t) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Es decir resulta nuevamente la suma de dos tensiones en cuadrantes: **(V_R)** en fase con **(i)** y **(V_L + V_C)** adelantada **(90°)** respecto a **(i)**, si $\omega.L > \dfrac{1}{\omega.C}$.

Efectuando la suma gráficamente como en el circuito serie **(R_L)**, llegamos a la conclusión de que en este caso **(X_L > X_C)** la tensión aplicada es del tipo: $V = Vm.sen(\omega.t + \varphi) \quad (2)$.
Para hallar los valores de **(Vm)** y (φ) procedemos como en los dos circuitos anteriores.
Desarrollando el seno de la suma en **(2)** e igualando los coeficientes $sen(\omega.t)$ y $\cos(\omega.t)$ de **(1)** y del desarrollo, **(3)**, y dividimos m. a m. Se obtiene:

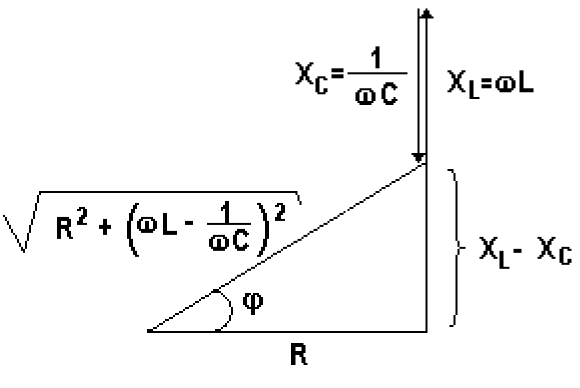
$$V = Vm.sen(\omega.t).\cos(\varphi) + Vm.sen(\varphi).\cos(\omega.t) \qquad (3)$$

$$Vm.sen(\varphi) = \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right).\mathrm{Im} \qquad (4)$$

$$Vm.\cos(\varphi) = R.\mathrm{Im} \qquad (5)$$

$$\boxed{tg(\varphi) = \frac{\omega.C - (1/\omega.C)}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R} \qquad (6)}.$$

Donde (**X = X_L - X_C)** recibe el nombre de **Reactancia total** o **simplemente Reactancia**. del circuito.



Este ángulo (φ) puede representar por el triangulo rectángulo de la (Fig. 2) del cual se obtiene: $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega.L - \dfrac{1}{\omega.C}\right)^2}}$

Y reemplazando en **(5)**.

$$\boxed{Vm = \sqrt{R^2 + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2}\,.\mathrm{Im} = \sqrt{R^2 + (Xc - XL)^2}\,.\mathrm{Im} = \sqrt{R^2 + (X)^2}\,.\mathrm{Im} \qquad (7)}$$

Introduciendo ahora **(6)** y **(7)** en **(2)** se obtiene que:

$$\boxed{V = \sqrt{R^2 + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2}\,.\mathrm{Im}\,.sen\left(\omega.t - arc\,tg\left(\frac{\omega.L - (1/\omega.C)}{R}\right)\right) \qquad (8)}.$$

Finalmente de **(7)** se deduce que la impedancia del circuito vale:

$$Z = \frac{Vm}{\mathrm{Im}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (Xc - XL)^2} = \sqrt{R^2 + (X)^2} \quad [\Omega] \qquad \mathbf{(9)}$$

Y esta representa por hipótesis del triangulo de la Figura.

Dividiendo numerador y denominador de **(9)** por $\sqrt{2}$ se encuentra que también en este circuito:

$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow V = Z.I \quad \mathrm{e} \quad I = \frac{V}{Z} \qquad \mathbf{(10)}$$

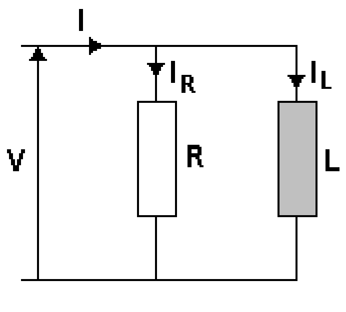
Razonando en base a lo expuesto sobre lo que ocurre con la corriente, podemos decir que:

1. Si **(X_L > Xc),** atrasa un ángulo $\boxed{\varphi = arc\,tg\left(\frac{XL - Xc}{R}\right) < 90°}$ respecto a **(V)** y tiene un valor eficaz $\boxed{I = \frac{V}{Z}}$.
2. Si **(X_L < Xc),** adelanta un ángulo $\boxed{\varphi = arc\,tg\left(\frac{XL - Xc}{R}\right) < 90°}$ respecto a **(V)** y tiene un valor eficaz $\boxed{I = \frac{V}{Z}}$.
3. Si **(X_L = Xc),** se halla en fase con **(V)** porque $\boxed{\varphi = 0}$ y alcanza el máximo valor eficaz posible $\boxed{I = \frac{V}{R}}$. Esta condición de funcionamiento del circuito llamada resonancia.

<u>Nota:</u> las formulas halladas para el circuito serie (RLC) revisten el carácter en general para todos los circuitos serie (incluido el CL) y para los casos particulares de circuitos con un solo elemento.

<u>Circuito con resistencia e inductancia en paralelo</u>

Puede servir como alternativa para representar con elementos ideales de una bobina con perdidas en el arrollamiento o en general para representar un circuito con este tipo de conexión. En el primer caso y lógicamente su resistencia difiere de la del circuito serie (RL), porque debe cumplirse que:



$$\textbf{Perd.por Arrollam.}\begin{cases} R.I^2 & \textbf{En el circ. serie RL} \\ \frac{V^2}{R} & \textbf{En el circ. // RL} \end{cases}$$

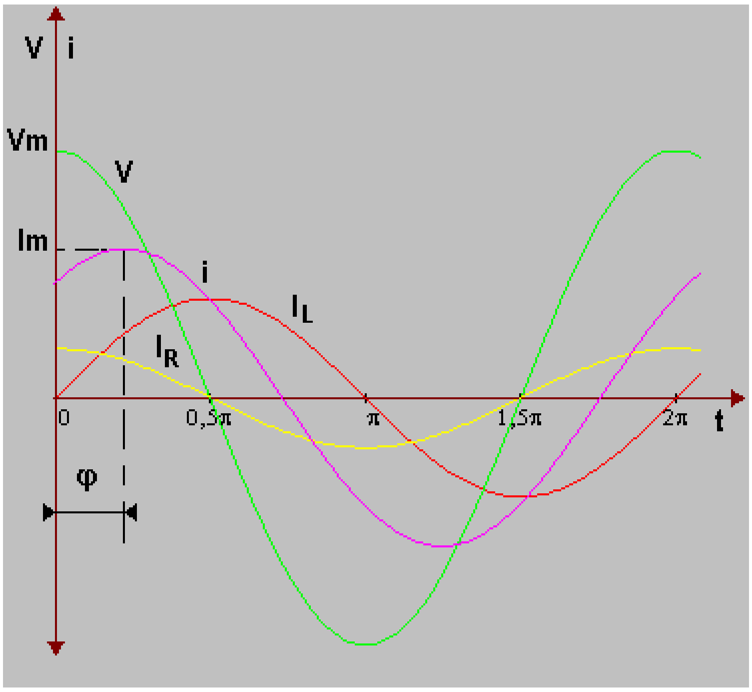
Supongamos que tiene aplicada un tensión $V = Vm.\cos(\omega.t)$ o $V = \hat{V}.sen(\omega.t)$ y hallamos la corriente que lo atraviesa aplicando la primera ley de kirchhof se encuentra que:

$$i = I_R + I_L$$

$$= \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V.dt$$

$$= \frac{Vm}{R}\cos(\omega.t) + \frac{Vm}{\omega.L}sen(\omega.t) \quad (1)$$

$$\text{corriente en fase con (v)} + \text{corriente en cuad. atras respct. a (v)}$$



Efectuando la suma (Fig. 2) se observa que **(i)** atrasa un ángulo (φ), o sea que es del tipo $i = \text{Im}.\cos(\omega\omega - \varphi)$

$$i = \hat{I}.sen(\omega.t - \varphi) \quad (2)$$

Donde **(Im)** y (φ) son los valores a determinar.

Desarrollando $\cos(\omega.t - \varphi)$ en (2) e igualando los coeficientes de $sen(\omega.t)$ y $\cos(\omega.t)$ con los de (1).

$$i = \text{Im}.\cos(\omega.t).\cos(\varphi) + \text{Im}.sen(\omega.t).sen(\varphi) \quad (3)$$

$$\text{Im}.sen(\varphi) = \frac{Vm}{\omega.L} = B_L.Vm \quad (4)$$

$$\text{Im}.\cos(\varphi) = \frac{Vm}{R} = G.Vm \quad (5)$$

Donde:

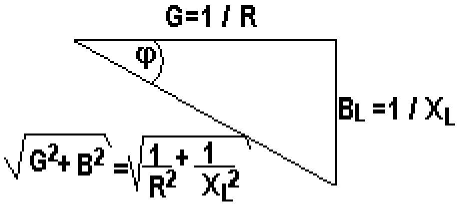
$$G = \frac{1}{R} = \text{Conductancia en siemens } [S]$$

$$B_L = \frac{1}{\omega.L} = \frac{1}{X_L} = \text{Susceptancia Inductiva } [S]$$

Tanto **(G)** como **(B$_L$)** son valores particularmente para este circuito; los generales son mas complejos.

Dividiendo m. A m (4) por (5): $\boxed{tg(\varphi) = \frac{B_L}{G} = \frac{R}{X_L} \quad (6)}$.

Relación que permite calcular (φ) y construirlo mediante el triangulo Figura.



De ella surge que:

$$\cos\varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B_L^2}} = \frac{1/R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}}, \quad y$$

reemplazando en (5):

$$\mathbf{Im} = \boldsymbol{Vm}\sqrt{\boldsymbol{G}^2 + \boldsymbol{BL}^2} = \boldsymbol{Vm}\sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{R}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{XL}^2}} \qquad \mathbf{(7)}$$

de (7) se obtiene que la impedancia del circuito vale:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{Vm}}{\mathbf{Im}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{G}^2 + \boldsymbol{BL}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{R}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{XL}^2}}} = \frac{\boldsymbol{R.XL}}{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{XL}^2}} \qquad \mathbf{(8)}$$

Y la admitancia (Y)(inversa de la impedancia):

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathbf{Im}}{\boldsymbol{Vm}} = \sqrt{\boldsymbol{G}^2 + \boldsymbol{BL}^2} = \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{R}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{XL}^2}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{XL}^2}}{\boldsymbol{R.XL}} \qquad \mathbf{(9)}.$$

Formula que muestra que esta representada por la hipotenusa del triangulo rectángulo dibujado anteriormente, llamado por eso **“Triangulo De Admitancia”** del circuito en paralelo RL.
El uso de admitancias facilita el estudio de las conexiones en paralelo y mixtas.
Resumiendo: En circuitos con resistencias e inductancias en paralelo la corriente vale, en general:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \sqrt{\boldsymbol{G}^2 + \boldsymbol{BL}^2}\,.\boldsymbol{Vm}.\cos(\omega.\boldsymbol{t} - \boldsymbol{arc\,tg}(\boldsymbol{BL}/\boldsymbol{G})) \\ &= \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{R}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{XL}^2}}.\boldsymbol{Vm}.\cos(\omega.\boldsymbol{t} - \boldsymbol{arc\,tg}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{XL})) \qquad \mathbf{(10)} \end{aligned}$$

Pero si $\boldsymbol{G} << \boldsymbol{BL}$, **o sea** $\boldsymbol{R} >> \boldsymbol{XL}$,

$$\varphi \to \frac{\pi}{2}\ ,\quad \mathrm{Y} \to \frac{1}{\boldsymbol{XL}} \quad \mathbf{e} \quad \boldsymbol{I} \to \frac{\boldsymbol{Vm}}{\mathbf{Im}}.\cos\left(\omega.\boldsymbol{t} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\boldsymbol{Vm}}{\mathbf{Im}}\,\boldsymbol{sen}(\omega.\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{IL}.$$

Porque por la rama resistiva prácticamente no circula corriente; en tanto que si $\boldsymbol{BL} << \boldsymbol{G}$ **, Es decir,** $\boldsymbol{XL} >> \boldsymbol{R}$,

$\varphi \to \frac{\pi}{2} \quad \mathrm{Y} \to \frac{1}{\boldsymbol{R}} \quad \mathbf{e} \quad \boldsymbol{I} \to \frac{\boldsymbol{Vm}}{\boldsymbol{R}}.\cos(\omega.\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{IR}$. Porque la inductancia prácticamente bloquea el paso de la corriente **(I_L)**.

Circuito con resistencia y capacitor conectados en paralelo

Como el circuito serie (RC), sirve para modelar con elementos puros un capacitor con perdidas en el dieléctrico o bien para representar circuitos conectados de esta forma.
Aplicando una tensión alterna senoidal $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Vm.sen}(\omega.\boldsymbol{t})$, según la primera ley de Kirchhof circulará una corriente que,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \boldsymbol{IR} + \mathrm{IC} \\ &= \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{R}} \qquad \boldsymbol{C}.\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} \\ &= \frac{\boldsymbol{Vm}}{\boldsymbol{R}}.\boldsymbol{sen}(\omega.\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\omega.C.Vm}.\cos(\boldsymbol{\omega.t}) \qquad \mathbf{(1)} \end{aligned}$$

como vemos tiene una componente en fase con **(V)** y la otra adelantada $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{*}$. Por consiguiente, su valor instantáneo debe ser del tipo $\boldsymbol{I} = \mathbf{Im}\,.\boldsymbol{sen}(\omega.\boldsymbol{t} + \varphi)$ $\mathbf{(2)}$, donde **(Im)** es igual a la “amplitud” y (φ) igual a el “desfase” a determinar desarrollando el $\boldsymbol{sen}(\omega.\boldsymbol{t} + \varphi)$ en **(2)**, igualando sus coeficientes de $\boldsymbol{sen}(\omega.\boldsymbol{t})$ $\boldsymbol{y}$ $\cos(\omega.\boldsymbol{t})$ con los de **(1)** y dividiendo m. a m. Se obtiene que:

$$I = \mathrm{Im}\,.sen(\omega.t).\cos(\varphi) + \mathrm{Im}\,.sen(\varphi).\cos(\omega.t) \quad (3)$$

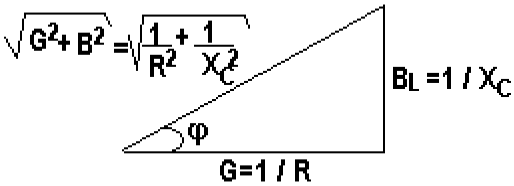
$$\mathrm{Im}\,.sen(\varphi) = \omega.C.Vm = (Bc).Vm \quad (4)$$

$$\mathrm{Im}.\cos(\varphi) = \frac{Vm}{R} = G.Vm \quad (5)$$

$$\boxed{tg(\varphi) = \frac{(Bc)}{G} = \frac{R}{Xc} \quad (6)}$$

Donde $Bc = \omega.C = \dfrac{1}{Xc}$, "susceptancia capacitiva" [S].

(6)permite determinar (φ), construir el triángulo de impedancias y hallar que:



$$\cos(\varphi) = \frac{G}{\sqrt{G^2 + Bc^2}} = \frac{\dfrac{1}{R}}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{Xc^2}}}.$$

*****(que no pueden medirse independientemente en el caso de un capacitor real)
Función que reemplazada en **(5)** conduce a que:

$$\boxed{\mathrm{Im} = \sqrt{G^2 + Bc^2}\,.Vm = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Xc^2}}\,.Vm \quad (7)}.$$

En **(8)** y **(9)** se obtiene la impedancia y la admitancia del circuito.

$$Z = \frac{Vm}{\mathrm{Im}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + Bc^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{Xc^2}}} = \frac{R.Xc}{\sqrt{R^2 + Xc^2}} \quad (8)$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Im}}{Vm} = \sqrt{G^2 + Bc^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Xc^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + Xc^2}}{R.Xc} \quad (9).$$

Se observa que (Y) equivale a la hipotenusa del triangulo rectángulo dibujado anteriormente, el cual constituye el Triangulo De La Admitancia.

Resumiendo:

En el circuito con (R) y (C) en paralelo ca corriente vale, en general:

$$I = \sqrt{G^2 + Bc^2}\,.Vm.sen\left[\omega.t + arc\,tg\left(\frac{Bc}{G}\right)\right] = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Xc^2}}\,Vm.sen\left[\omega.t + arc\,tg\left(\frac{R}{Xc}\right)\right]$$

(10), pero:

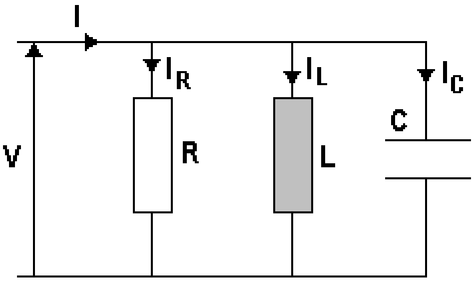
Si $G << Bc,$ o sea $R >> Xc,$

$\phi \to \dfrac{\pi}{2},\quad \mathrm{Y} \to \dfrac{1}{Xc}$ e $I \to \dfrac{Vm}{Xc}.sen\left(\omega.t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{Vm}{Xc}\cos(\omega.t) = Ic$ porque en tanto que si $Bc << G,$ o sea, $Xc >> R,$

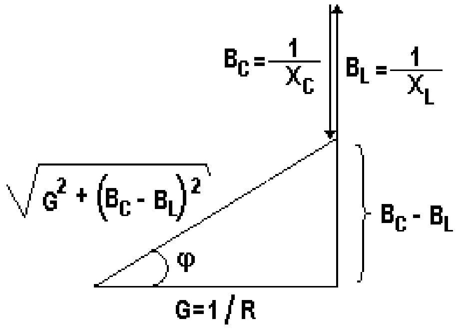
$\phi \to 0,\quad \mathrm{Y} \to \dfrac{1}{R}$ e $I \to \dfrac{Vm}{R}.sen(\omega.t) = I_R$, porque la rama (c) casi bloquea el paso de **(Ic)**.

Circuito con resistencia, inductancia y capacitancia en paralelo

Puede representar la conexión en paralelo de una bobina real y un capacitor ideal o real. La resistencia considera pues con lo del arrollamiento de la bobina o con la resistencia equivalente a (R) del arrollamiento en paralelo con la (R) por perdida del capacitor.



Aplicando una tensión $V = Vm.sen(\omega.t)$, circulará por él una corriente:



$$I = I_R + I_L + I_c$$

$$= \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V.dt + C.\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{Vm}{R}.sen(\omega.t) - \frac{Vm}{\omega.L}\cos(\omega.t) + \omega.C.Vm.\cos(\omega.t)$$

$$= \frac{Vm}{R}.sen(\omega.t) + \left(\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right).Vm.\cos(\omega.t)$$

$$= G.sen(\omega.t) + (Bc - B_L)Vm.\cos(\omega.t) \qquad \textbf{(1)}$$

$$= \textbf{corriente en fase} + \textbf{corriente adel. } 90° \textbf{ resp. a v,}$$

$$\quad\textbf{con (v)} \qquad\qquad \textbf{si Bc} > \textbf{B}_L$$

$$= \textbf{corriente adelantada respecto a (v) del tipo.}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Im}\,.sen(\omega.t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

Procediendo como en otros casos a desarrollar el $sen(\omega.t + \varphi)$ y a igualar sus coeficientes de $sen(\omega.t)$ y $\cos(\omega.t)$ con los de **(1)** se encuentra que:

$$I = \mathbf{Im}\,.sen(\omega.t).\cos(\varphi) + \mathbf{Im}\,.\cos(\omega.t).sen(\varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\mathbf{Im}\,.sen(\varphi) = (Bc - B_L).Vm = B.Vm \qquad \textbf{(4)}$$

$$\mathbf{Im}\,.\cos(\varphi) = G.Vm \qquad \textbf{(5)}$$

$$\boxed{tg(\varphi) = \frac{B}{G} = \frac{(Bc - B_L)}{G} = \frac{\left(\frac{1}{Xc} - \frac{1}{X_L}\right)}{\frac{1}{R}} \qquad \textbf{(6)}}.$$

Formula que permite determinar el desfase de la corriente, (φ), y representarlo gráficamente; y en la cual $B = (Bc - B_L) = \underline{\textbf{Susceptancia Total}}$, o simplemente susceptancia del circuito.

Del triangulo rectángulo dibujado anteriormente se encuentra que:

$$\cos(\varphi) = \frac{G}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{G}{\sqrt{G^2 + (Bc - B_L)^2}} = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

Y reemplazando en **(5)**.

$$\mathbf{Im} = \sqrt{G^2 + B^2}\,.Vm = \sqrt{G^2 + \left(Bc - B_L\right)^2}\,.Vm = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc} - \frac{1}{X_L}\right)^2}\,.Vm \quad \mathbf{(7)}$$

De **(7)** se obtiene que la impedancia y la admitancia valen:

$$Z = \frac{Vm}{\mathrm{Im}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(Bc - B_L\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} \quad \mathbf{(8)}$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Vm}} = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(Bc - B_L\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad \mathbf{(9)}$$

Donde **(9)** muestra que (Y) es igual a la hipotenusa del triangulo rectángulo de la Figura, llamado Triangulo De Impedancia Del Circuito RLC En Paralelo.

Resumiendo:

Si $Bc >> B_L$, o sea, $Xc << X_L$ $\quad I = \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{G^2 + \left(Bc - B_L\right)^2}}.Vm.sen\left[\omega.t + arc\,tg\left(\frac{\left(Bc - B_L\right)}{G}\right)\right]$

Si $B_L >> Bc$, o sea, $X_L << Xc$ $\quad I = \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{G^2 + \left(Bc - B_L\right)^2}}.Vm.sen\left[\omega.t - arc\,tg\left(\frac{\left(B_L - Bc\right)}{G}\right)\right]$

Si $Bc = B_L$, o sea, $Xc = X_L$ $\quad I = G.Vm.sen(\omega.t)$,

Nota: Las formulas y el triangulo de impedancia del circuito en paralelo RLC contienen los resultados Hallados en el circuito en paralelo RL y en el circuito RC. El alumno lo verificará como ejercicio.

Potencia en corriente alterna

La relación de la potencia de la corriente continua es igualmente válida para la corriente alterna si está referida a los vectores instantáneos de intensidad y tensión, por lo tanto:

$$\mathbf{p = v \cdot i}$$

Cómo en corriente alterna tanto **v** como **i** son función del tiempo, **p** también dependerá de éste y su determinación dependerá, además, del ángulo de desfase entre estos dos parámetros. Cabe aclarar que la potencia no puede representarse en el mismo diagrama que la tensión y la corriente debido a que su frecuencia es el doble que la de los parámetros mencionados.
Teniendo en cuenta estos conceptos, se pueden definir los siguientes valores de potencia en un circuito alimentado con corriente alterna:
Potencia activa: Es la potencia que realmente se utiliza para producir algún tipo de trabajo o energía. Se designa con la letra **P** y se expresa con la siguiente relación:

$$\mathbf{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$$

Potencia reactiva: Es la potencia que se utiliza para alimentar la parte reactiva de la carga. Por ejemplo para generar el campo magnético en máquinas eléctricas. Se designa con la letra **Q** y se expresa con la siguiente relación:

$$\mathbf{Q = U \cdot I \cdot sen\varphi}$$

Potencia aparente: El producto de los valores eficaces de intensidad y tensión, representa sólo aparentemente una potencia. Este valor de potencia es la que se requiere de los sistemas que suministran la energía eléctrica, ya que para el correcto funcionamiento de las cargas es necesario suministrar tanto potencia activa como reactiva. Se designa con la letra **S** y se expresa con la siguiente relación:

$$\mathbf{S = U \cdot I}$$

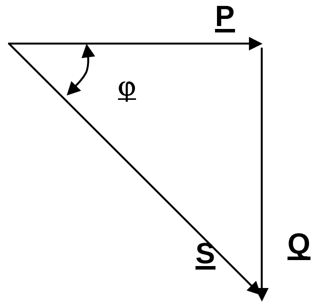
La relación entre la potencia activa y la potencia aparente se denomina factor de potencia, ya que es una medida de cómo se aprovecha la potencia entregada por los sistemas para el funcionamiento de las cargas.

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{U \cdot I \cdot \cos\varphi}}{\mathbf{U \cdot I}} = \mathbf{\cos\varphi}$$

Al combinar las expresiones de los tres valores de potencia mencionados, encontramos la siguiente relación:

$$\mathbf{S^2 = P^2 + Q^2}$$

Esto implica que estas tres potencias pueden representarse por el siguiente diagrama vectorial, denominado usualmente triángulo de potencias.



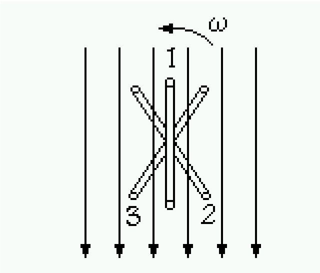
SISTEMAS POLIFÁSICOS

Introducción

El sistema monofásico visto hasta ahora es muy utilizado para iluminación y artefactos eléctricos de uso residencial, pero para otras aplicaciones como son la transmisión de Energía Eléctrica y la fuerza motriz no es muy recomendable. En el primer caso porque el sistema de generación estaría poco aprovechado, pasando el sistema monofásico a formar parte del sistema polifásico. En el segundo caso, porque los motores monofásicos no desarrollan una gran potencia, además de otros inconvenientes: la cupla que proporcionan es muy pulsante y necesitan sistemas auxiliares de arranque.
Por esta razón se utilizan sistemas polifásicos de los cuales el mas difundido es el trifásico.

Generación de una f.e.m. trifásica

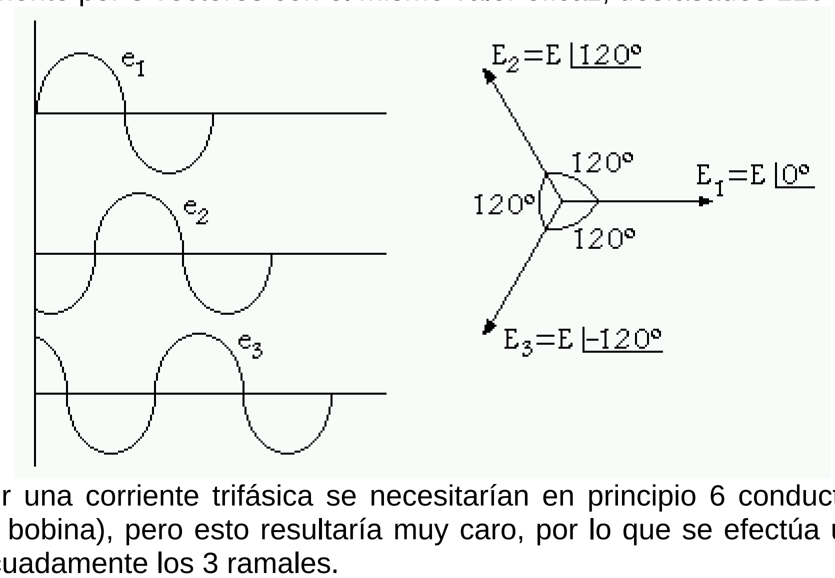
Haciendo girar una espira o bobina con velocidad ω uniforme, dentro de un campo magnético homogéneo, obtenemos una f.e.m. inducida que responde a una variación senoidal.
Utilizando tres arrollamientos con igual número de vueltas, girados entre sí 120º en el espacio (esquemáticamente representados en la figura), obtendremos f.e.m.s inducidas en los mismos, desfasadas entre sí 120º.



Cada una de las f.e.m.s va a estar dada por la siguiente expresión:

$$e_1 = E_{max}\ \mathrm{sen}(\omega t) \quad - \quad e_2 = E_{max}\ \mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad - \quad e_3 = E_{max}\ \mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

Y va a estar representada gráficamente mediante tres ondas senoidales desfasadas 120º entre sí y vectorialmente por 3 vectores con el mismo valor eficaz, desfasados 120º.



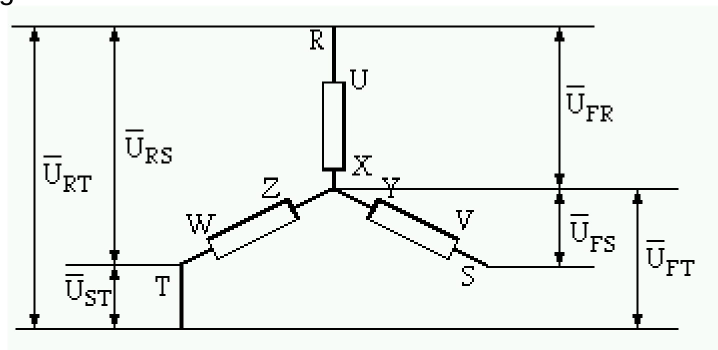
Para conducir una corriente trifásica se necesitarían en principio 6 conductores (comienzo y final de cada bobina), pero esto resultaría muy caro, por lo que se efectúa una interconexión, uniendo adecuadamente los 3 ramales.
Hay tres formas de interconectar las bobinas:

- Conexión en triángulo
- Conexión en estrella
- Conexión en Zig-Zag

Nosotros vamos a ver las dos primeras por ser las mas utilizadas.

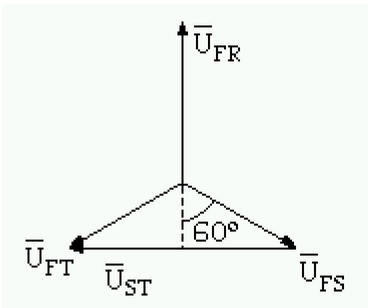
Conexión en estrella

Por convención vamos a llamar a cada una de las fases del sistema trifásico con las letras R, S y T, y a los comienzos y finales de cada devanado con U, V, W, X, Y y Z, respectivamente. Si los represento gráficamente (como muestra la figura), uniendo los 3 finales de los devanados entre sí obtengo la conexión en estrella.



Las f.e.m. individuales de cada bobina van a estar dadas por cada una de las expresiones anteriores. La tensión que "entregarán" a una carga, será una tensión monofásica que la denomino tensión de fase y la designo con U_F.

Si conecto una carga entre los extremos de dos bobinas, entre ellas habrá una tensión compuesta, ya que es la resultante de la producida por ambos devanados. Dibujando el diagrama vectorial:



Del diagrama vectorial obtenemos: $U_{ST} = 2 \cdot U_{FS} \operatorname{sen} 60^{o}$

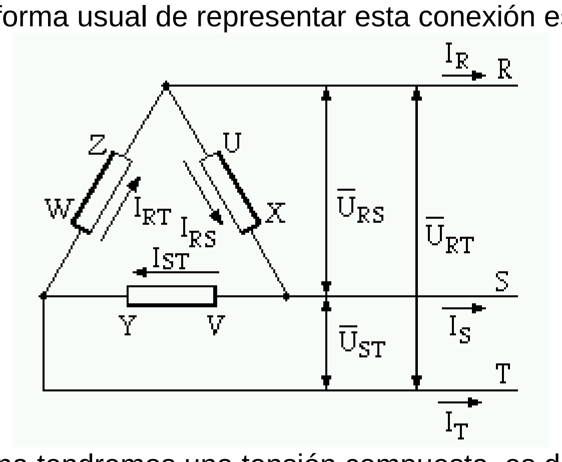
A esta tensión compuesta la denominamos tensión de línea y la designamos con U. Generalizando la expresión y operando, tenemos:

$$U = 2 \cdot U_F \operatorname{sen} 60^{o} \Rightarrow U = 2 \cdot U_F \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U = \sqrt{3} \cdot U_F$$

Conexión en triángulo

Uniendo el final de cada bobina con el principio de la siguiente, obtenemos la conexión en triángulo. La forma usual de representar esta conexión es la siguiente:



En cada bobina tendremos una tensión compuesta, es decir que la tensión de cada fase (en los bornes de cada bobina) en la conexión triángulo es igual a la tensión de línea (diferencia de potencial entre los conductores de línea).

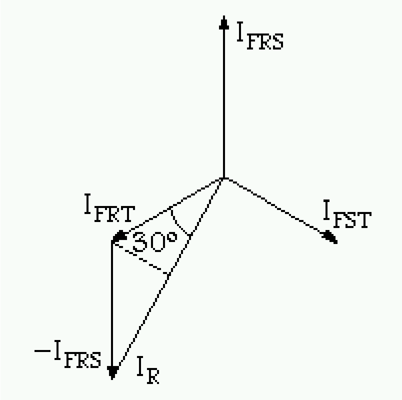
Entonces en la conexión triángulo: $U_F = U$

En lo que respecta a la corriente del sistema trifásico conectado en triángulo, una vez conectado la carga, es decir cerrado el circuito, va a haber una corriente que circula por cada fase, tal como se indica en la figura, a la que llamaremos genéricamente I_F (corriente de fase), y otra corriente que circula por los conductores de línea I (corriente de línea). Si observamos el circuito podemos ver que cada una de las corriente de línea estará determinada por la diferencia entre los dos vectores de corrientes de fase que convergen en el nodo correspondiente.

Tomando la fase R como referencia:

$$I_R = I_{FRT} - I_{FRS}$$

Si el sistema es equilibrado, es decir, las tres corriente tienen igual magnitud y están desfasadas 120º, el diagrama vectorial será el siguiente:



Del diagrama vectorial obtenemos: $\frac{1}{2} I_R = I_{FRS} \cos 30^{\circ}$

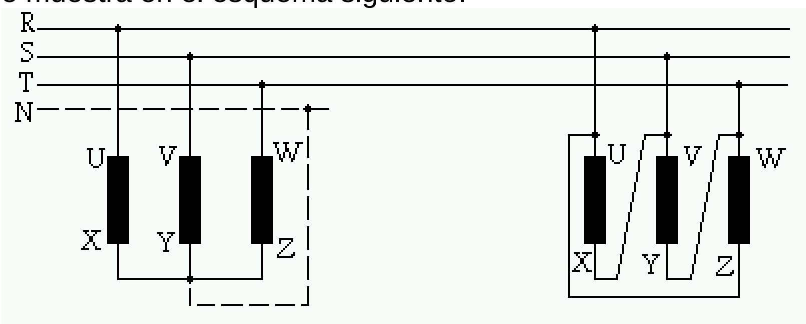
Generalizando la expresión y operando:

$$\frac{1}{2} I = I_F \cos 30^{\circ} \Rightarrow I = 2 \cdot I_F \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \sqrt{3} \cdot I_F$$

Para un sistema conectado en estrella en cambio tenemos que I= I_F.

De la misma forma que las bobinas de un generador pueden estar conectada en estrella o en triángulo, las cargas conectadas a un sistema trifásico de 3 o 4 conductores, pueden estar conectadas en estrella o en triángulo. De esta forma podemos tener representadas las cargas como se muestra en el esquema siguiente.



Si las cargas son equilibradas se van a cumplir las relaciones dadas anteriormente.

Conexión estrella	Conexión triángulo
$U = \sqrt{3} \cdot U_F \quad I = I_F$	$U = U_F \quad I = \sqrt{3} \cdot I_F$

Sistemas Trifásicos desequilibrados

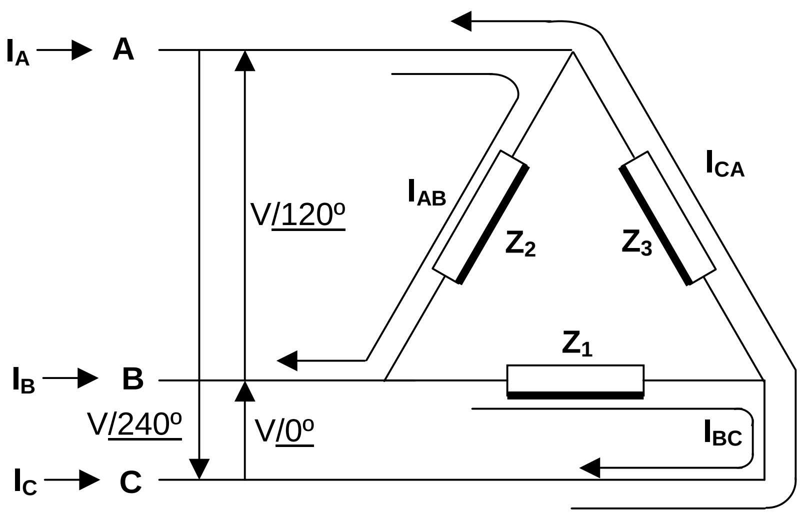
Cuando aplicamos un sistema equilibrado de tensiones a una carga desequilibrada, es decir con impedancias de fase diferentes, las corrientes que se originan ya no son iguales y desfasadas 120º como en los sistemas con cargas equilibradas.
La característica de estas corrientes así como la manera de analizarlas son diferentes según el diagrama de conexión de las cargas.
También de cada conexión surgirán particularidades y problemas especiales.
Las tres formas mas comunes de conectar un circuito trifásico desequilibrado son:

- Carga desequilibrada conectada en Triángulo
- Carga desequilibrada conectada en Estrella con neutro
- Carga desequilibrada conectada en Estrella sin neutro

Vamos a analizar cada uno de los casos por separado

Carga desequilibrada conectada en Triángulo

Al conectar en triángulo una carga, queda aplicada la tensión compuesta a cada una de las impedancias de fase. Debido a que estas impedancias son distintas entre si, las corrientes que se generan no son iguales. Nos interesa en este caso hallar las corrientes de línea que son las que deberá entregar nuestro sistema a la carga.
La solución se obtiene calculando las corrientes de fase y aplicando después la primera ley de Kirchhoff a los nudos principales para deducir las tres corrientes de línea buscadas.
El esquema de conexiones y la circulación de las corrientes quedarán de la siguiente manera:



De el se deduce el cálculo de las corrientes de la siguiente manera:

$$I_{AB} = V_{AB} / Z_{AB} \quad , \quad I_{BC} = V_{BC} / Z_{BC} \quad , \quad I_{CA} = V_{CA} / Z_{CA}$$

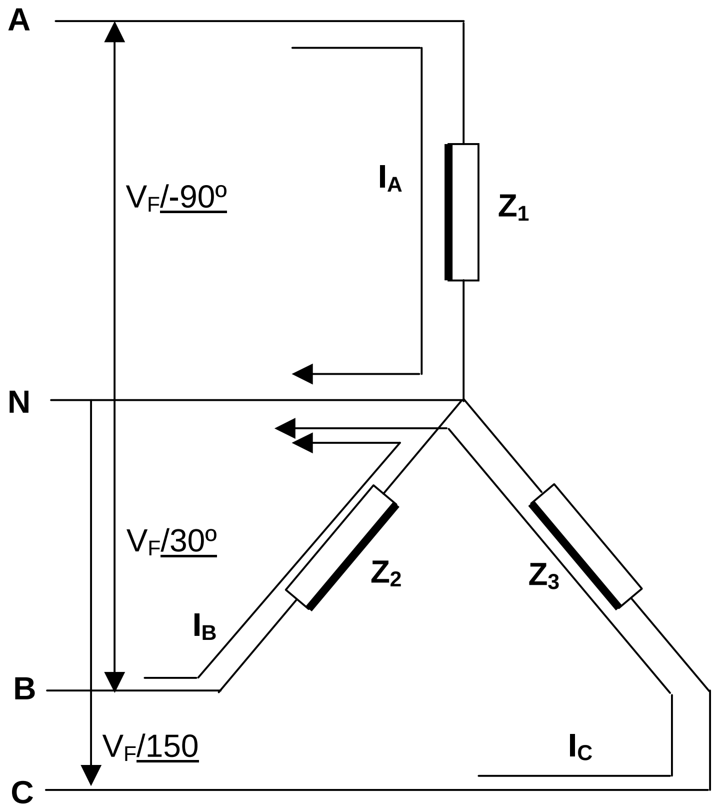
Luego:

$$I_A = I_{AB}+I_{AC} = I_{AB}-I_{AC}$$
$$I_B = I_{BA}+I_{BC} = -I_{BA}+I_{BC}$$
$$I_C = I_{CA}+I_{CB} = I_{CA}-I_{CB}$$

Des esta manera hallamos cada una de las corrientes de línea de nuestro sistema desequilibrado, las cuales no serán iguales ni estarán desfasadas 120º.

Carga desequilibrada conectada en Estrella con neutro

Al conectar las cargas en estrella sin neutro, a cada impedancia de queda aplicada la tensión de fase, y la corriente que circula será igual a la de línea.
El nuevo punto en esta conexión surge ya que por el cuarto conductor circulará una corriente, denominada corriente de neutro. Interesa entonces conocer esa corriente.
Para calcular la misma, observando el diagrama correspondiente vemos que surge de la suma de cada una de las corrientes de fase.



Entonces:

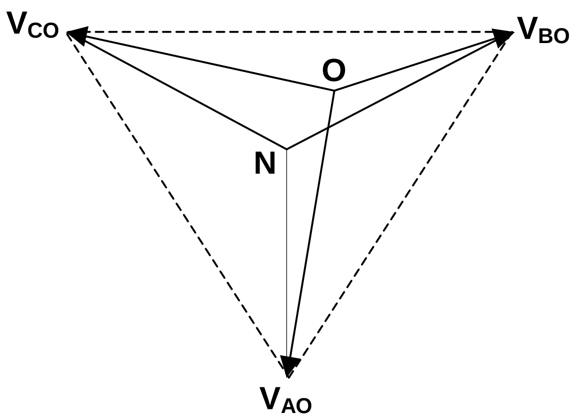
$$I_A = V_{AN} / Z_A \quad , \quad I_B = V_{BN} / Z_B \quad , \quad I_C = V_{CN} / Z_C$$

$$I_N = I_A + I_B + I_C$$

Esta corriente entonces estará circulando en nuestro conductor de neutro, por lo tanto habrá que tomar precauciones respecto al contacto directo con el mismo por ejemplo.

Carga desequilibrada conectada en Estrella sin neutro

Si solamente hay tres líneas A, B y C conectadas a una carga en estrela desequilibrada, el punto común de las tres impedancias de carga no esta al potencial del neutro y se designa por la letra “O” en lugar de N. Las tensiones entre los extremos de las tres impedancias pueden variar considerablemente del valor de la tensión simple como se ve en el triángulo de tensiones que relaciona las tensiones del circuito. Tiene particular interés el desplazamiento a “O” desde N, llamado tensión de desplazamiento de neutro.



Para calcular esa tension de desplazamiento, primero calcularemos las corrientes de fase (por medio de un sistema de ecuaciones). Una vez halladas las tres corrientes de fase tendremos:

$$V_{AO} = Z_A I_A \quad , \quad V_{BO} = Z_B I_B \quad , \quad V_{CO} = Z_C I_C$$

Como se ve en el diagrama la tension V_{ON} puede calcularse utilizando cualquiera de los tres puntos A, B o C.
Con el punto A quedaría:

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN}$$

La tensión de desplazamiento de neutro adquiere particular importancia ya que provoca que algunas de las cargas reciban una tensión menor a la nominal y otras una tensión mayor, con los riesgos que esto conlleva hacia los artefacto eléctricos así como para las personas.

Potencia Trifásica

Para determinar la potencia activa total de una fase cualquiera de un sistema trifásico puedo proceder de la misma forma que si tuviera sistemas monofásicos separados según:

$$P_{fase} = U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

Si el sistema que me ocupa es un **sistema equilibrado o simétrico**, entonces la tensión y corriente de fase, así como el factor de potencia de la formula anterior son iguales para cada fase, por lo que puedo determinar la potencia activa total mediante:

$$P = 3 \cdot P_{fase} = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi \qquad (1)$$

Si recordamos las relaciones entre tensión de fase y de línea y corriente de fase y de línea para un **sistema trifásico conectado en estrella**, teníamos lo siguiente:

$$U = \sqrt{3} \cdot U_f \qquad I = I_f$$

Por lo que reemplazando estos valores en la expresión de la potencia activa total (1):

$$P = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad (2)$$

Y las mismas relaciones para un **sistema trifásico conectado en triángulo**, eran:

$$U = U_f \qquad I = \sqrt{3} \cdot I_f$$

Reemplazando en la expresión (1) tenemos:

$$P = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos\varphi \qquad (3)$$

Operando, tanto para la expresión (2) como para la (3), tenemos:

$$\boxed{P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi}$$

Análogamente podemos calcular la potencia reactiva y aparente según:

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

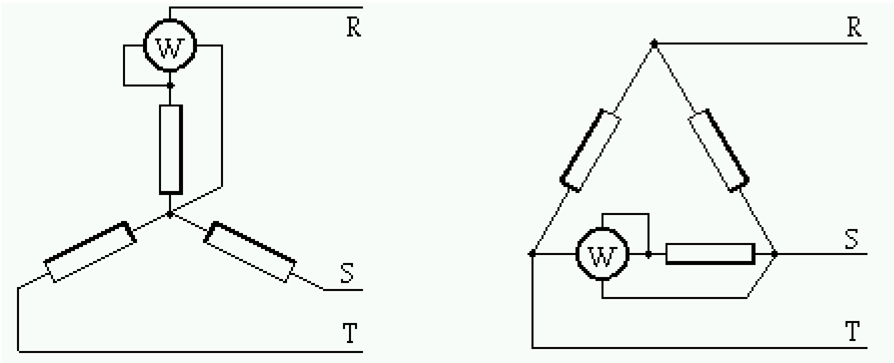
Siendo U e I valores eficaces de tensión y corriente de línea y cos φ el factor de potencia de la carga equilibrada o simétrica.
Si el sistema es un **sistema desequilibrado o asimétrico**, la forma de calcular la potencia activa y reactiva total es:

$$P = \sum P_{fase} \qquad y \qquad Q = \sum Q_{fase}$$

Una vez calculada la potencia activa y reactiva total, puedo determinar la potencia aparente del sistema.

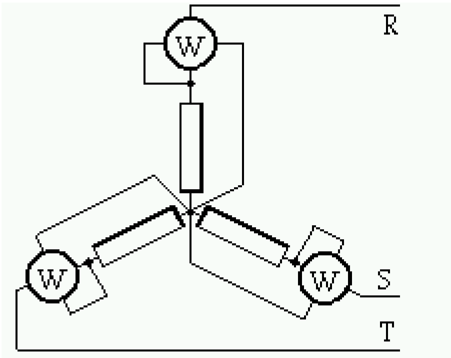
Medición de Potencia Trifásica

Para medir la potencia trifásica de un sistema simétrico o equilibrado, es suficiente con conectar un wattimetro que mida la potencia de una de las fases y multiplicar esta medición por tres. La conexión en un sistema conectado en estrella o en triángulo se muestra en la siguiente figura:



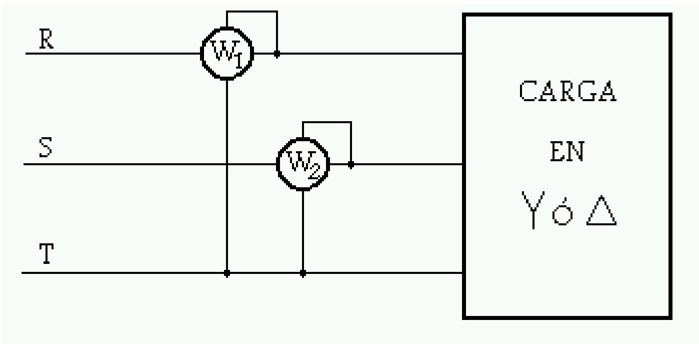
Por lo tanto la potencia total de un sistema trifásico de estas características va a estar dada por: $P = 3 \cdot P_{medida}$

Si el sistema es desequilibrado o asimétrico, es necesario medir la potencia en cada una de las fases y sumar las mediciones efectuadas para hallar la potencia total. Si utilizamos tres wattímetros el circuito para una conexión estrella será:



De la misma forma para una conexión en triángulo se conectará un wattímetro por fase. Así, la potencia total del sistema trifásico será: $P = \sum P_{medidas}$

Si el sistema trifásico no tiene el neutro accesible, en una conexión estrella o en una conexión triángulo no es factible conectar el watímetro a la fase, no se podrá medir la potencia por los métodos antes enunciados, ya sea el sistema equilibrado o no.
En estos casos puede medirse la potencia total del sistema con dos wattímetros conectados de la siguiente forma.



Para comprobar la veracidad del método vamos a partir de la base que en un sistema trifásico cualquiera, podemos determinar la potencia activa total en forma general por:

$$P = \sum P_{fase}$$

Si sustituimos por los valores instantáneos de tensión y corrientes tenemos:

$$p = u_{fR} \cdot i_R + u_{fS} \cdot i_S + u_{fT} \cdot i_T$$

Si el sistema no tiene neutro por la 1º ley de Kirchhoff la suma de las corriente será igual a cero, por lo tanto:

$$i_R + i_S + i_T = 0 \quad \Rightarrow \quad i_T = -i_R - i_S$$

Reemplazando en la expresión de la potencia:

$$p = u_{fR} \cdot i_R + u_{fS} \cdot i_S + u_{fT} \cdot (-i_R - i_S)$$
$$p = u_{fR} \cdot i_R + u_{fS} \cdot i_S - u_{fT} \cdot i_R - u_{fT} \cdot i_S$$

Asociando: $p = i_R(u_{fR} - u_{fT}) + i_S(u_{fS} - u_{fT})$

Los valores de tensión dados entre paréntesis, pueden reemplazarse por los valores instantáneos de la tensión de línea, con lo que la expresión de la potencia instantánea quedará:

$$p = i_R u_{RT} + i_S u_{ST}$$

Por lo que la potencia activa total del sistema es la suma de los valores medidos por dos instrumentos conectados según el circuito dado, ya sea que la carga sea equilibrada o desequilibrada y esté conectada en estrella o en triángulo.
La potencia activa total será: $P = P_{1medido} + P_{2medido}$

Hay que tener en cuenta que cada una de las potencias medidas de este modo no representa por sí sola un valor de potencia en ninguna de las fases del sistema.
Este método para medición de potencia trifásica se denomina **método Aron o de los dos wattímetros** y se base en el **teorema de Blondel**, que dice: Se puede medir la potencia activa de cualquier circuito de n fases, utilizando (n-1) wattímetros, con la condición de que sus bobinas de intensidad estén sobre (n-1) líneas distintas, y las (n-1) bobinas de tensión tengan un punto común situado en la línea restante.

NOCIONES SOBRE LA CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA Y SU IMPORNTANCIA TÉCNICO-ECONÓMICA

Resumen de manual LEYDEN para corrección del factor de potencia

El factor de potencia

La utilización de la energía eléctrica, distribuida mediante redes de corriente alterna, lleva implícita la existencia de componentes inductivas para el establecimiento de los campos magnéticos en los motores, reactancia de las lámparas de descarga o tubos fluorescentes, etc.

Tales campos requieren de la red de alimentación una cierta potencia reactiva (KVAr) que, si bien no significa un aumento de la potencia activa (KW), se traducen en: costo económico para aquellos usuarios a los que se les factura energía reactiva, mala regulación de la tensión de suministro (generalmente en ‘baja tensión”), mayores pérdidas en líneas y elementos de distribución y aumento de la potencia aparente (KVA) requerida para igual potencia activa utilizada.

Repasando conceptos anteriores, las distintas clases de potencia que un circuito eléctrico puede intercambiar con la red son:

Potencia activa: Es la que efectivamente se aprovecha como potencia útil.

$$P = U.I.\cos\varphi \quad [W]$$

Potencia reactiva: Es la que los campos magnéticos intercambian con la red sin significar un consumo de potencia activa en forma directa.

$$Q = U.I.\mathrm{sen}\,\varphi \quad [VAr]$$

Potencia aparente: Es la que resulta de considerar la tensión aplicada y la corriente consumida, esta potencia es lo que limita la utilización de transformadores, líneas de alimentación y demás elementos componentes de los circuitos eléctricos

$$S = U.I. \; [VA]$$

Para una misma potencia activa P, que efectivamente utilicemos, tendremos que la corriente I y la potencia aparente S son mínimas cuando el ángulo $\varphi = 0$ ($\cos\varphi = 1$).

Al $\cos\varphi$ se lo identifica como “FACTOR DE POTENCIA”, siendo su compensación aproximadamente igual a 1 mediante el uso de capacitores en instalaciones industriales.

Compensación del factor de potencia

La potencia aparente que recibe un consumidor se descompone en activa y reactiva (fig. 1). La potencia activa debe ser suministrada por la red, pero la reactiva puede ser compensada con la conexión de capacitores quedando el esquema de la figura 2

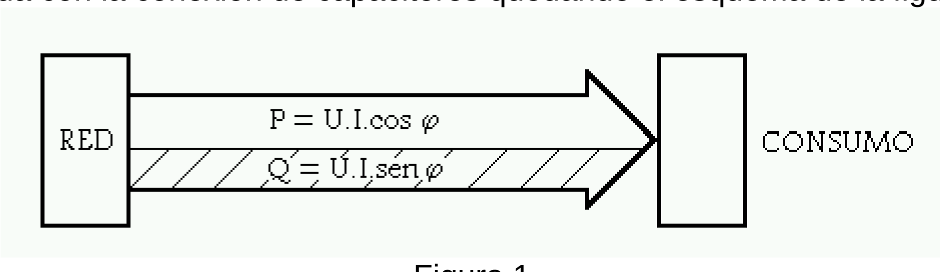


Figura 1

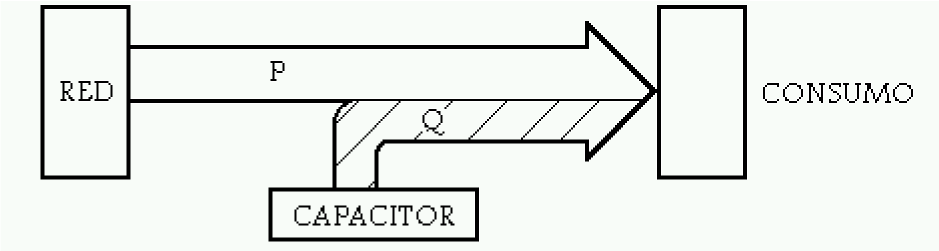


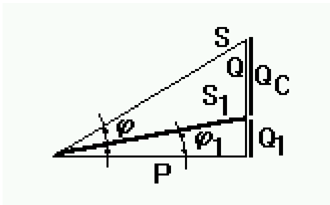
Figura 2

Determinación de la potencia reactiva necesaria

Las expresiones dadas para las distintas potencia corresponden a circuitos monofásicos, en tanto que para los circuitos trifásicos dichas potencias se expresan mediante:

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \mathrm{sen}\,\varphi$$
$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

Podemos determinar la potencia reactiva de los capacitores necesarios para compensar el factor de potencia remitiéndonos al triángulo de potencias que se esquematiza a continuación:



Conociendo el valor de potencia activa, o aparente y los cosenos, inicial y final, puedo calcular el valor de potencia reactiva capacitiva necesaria para la compensación de la siguiente forma:

$$P = S\cos\varphi;\ P = S_1\cos\varphi_1$$
$$Q = S\,\mathrm{sen}\varphi;\ Q_1 = S_1\,\mathrm{sen}\varphi_1$$
$$Q_C = Q - Q_1 = S\,\mathrm{sen}\varphi - S_1\,\mathrm{sen}\varphi_1$$
$$Q_C = (P/\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\varphi - (P/\cos\varphi_1)\,\mathrm{sen}\varphi_1$$
$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi_1)$$

Esto se simplifica si tenemos una tabla de fabricantes (ver Tabla Nº 1) de capacitores para corrección del factor de potencia, donde ingresando con los valores de factor de potencia inicial y final, obtenemos el factor ($\tan\varphi - \tan\varphi_1$) por el cual multiplicamos la potencia activa, y hallamos directamente el valor de la potencia reactiva capacitiva necesaria para la compensación.

Otra ventaja que podemos obtener de la compensación del factor de potencia posible aumentar las cargas a un sistema si se compensa la el factor de potencia de las mismas, con una misma potencia aparente a entregar. Dicho en otras palabras, si en un sistema de potencia tengo “disponible” una misma potencia aparente, antes y después de la compensación del factor de potencia, una vez compensadas las cargas obtendré un “sobrante” de potencia aparente que puede ser utilizado para alimentar nuevas cargas.

En aquellos casos en que la información sea proveniente de medidores de energía debe tenerse en cuenta que el concepto de energía involucra una cierta potencia consumida a lo largo de un lapso de tiempo.

ENERGÍA (kWh) = POTENCIA (kW) x TIEMPO (h)

Lo mismo se aplica al caso de energía reactiva:

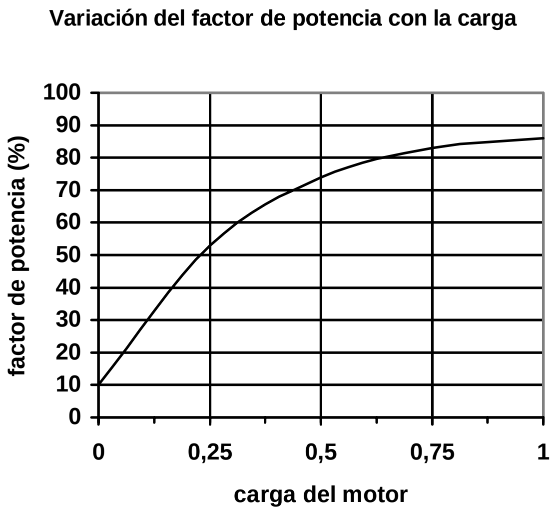
ENERGÍA (kVArh) = POTENCIA (kVAr) x TIEMPO (h)

Mediante estas expresiones podemos hallar la potencia activa y reactiva considerando un mismo lapso de tiempo y la tangente del ángulo como la relación entre energía (o potencia) reactiva y activa. Con estos valores y conociendo el factor de potencia al que se requiere llegar con la compensación, puedo determinar la potencia capacitiva necesaria para la corrección.

Compensación de motores asincrónicos

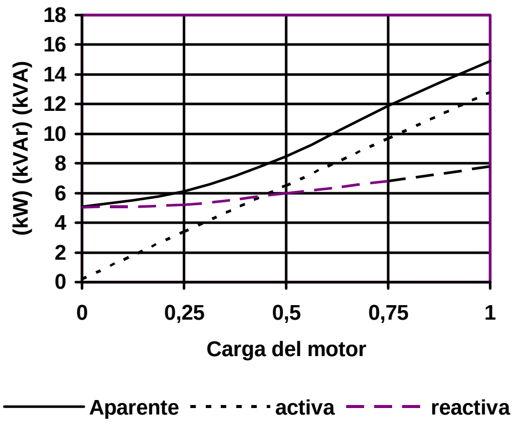
La compensación individual de motores tiene características particulares ya que el factor de potencia de un motor asincrónico a inducción a plena carga es generalmente alto pero, para cargas pequeñas, disminuye rápidamente, como se ilustra en la siguiente figura. Generalmente los motores no trabajan a plena carga, lo que da como resultado bajos valores del factor de potencia.

Aunque el factor de potencia de un motor a inducción varía notablemente con la carga,



la potencia reactiva del motor es relativamente constante. De esta forma, compensando el motor con un capacitor adecuado el factor de potencia resulta del orden del 95 a 98 % a plena carga y mayor para cargas parciales.

Variación de potencia activa, reactiva y aparente con la carga



La conexión del capacitor para el mejoramiento del factor de potencia no cambia las características de funcionamiento del motor, ya que la velocidad de operación y la potencia mecánica del motor sólo dependen de la carga del motor y de la tensión aplicada.
La conexión de capacitores a los bornes del motor se realiza entre la protección térmomagnética y bornes del motor. La conexión de los capacitores debe hacerse teniendo en cuanta los siguiente aspectos:

- Debe ajustarse la protección termomagnética teniendo en cuanta que el capacitor compensa la potencia reactiva, por lo cual la corriente permanente que circulará por la protección será menor que cuando no había compensación.
- Cuando se abre el interruptor de alimentación y el motor sigue girando por su propia inercia o por la de la carga puede ocurrir que el capacitor suministre la corriente magnetizante para que el motor funcione como generador, llegando a producir sobretensiones de valor importante. Para evitar este efecto hay que dimensionar la potencia capacitiva a conectar en función de la característica magnética del motor para evitar su funcionamiento como generador. En la Tabla Nº 2 se muestran los capacitores recomendados para conectar según la potencia y velocidad del motor.

Instalación de capacitores y criterio de compensación

El mejor lugar en la planta para conectar los capacitores deberá establecerse en función de una observación de cada instalación en particular. Siempre debe tenerse en cuenta que la corrección se efectúa desde el capacitor hacia la fuente de energía. Desde el punto de vista puramente técnico el capacitor debería estar generando la potencia reactiva necesaria que necesita cada consumo en particular, de modo que los conductores que lo alimentan sólo deberán conducir la corriente que demanda la potencia activa, mientras la que demanda la potencia reactiva se genera en cada consumo.
No siempre es posible hacer esto, fundamentalmente por las siguientes razones:

- Si los consumos individuales a compensar son demasiado pequeños, los capacitores que se empleen resultarán de pequeño valor y el costo total de la compensación resulta elevado.
- Si los artefactos o motores tienen un factor de simultaneidad bajo, la compensación sólo actuará en los momentos de marcha de las máquinas
- Los equipos de compensación se encuentran diseminados por lo cual se hace difícil su control.
- La instalación de un equipo por consumo se hace onerosa en una planta que ya ha sido construida y se encuentra en operación.

Es por lo tanto necesario establecer distintas formas de efectuar la corrección del factor de potencia

Compensación centralizada para el total del consumo

En este caso el factor de potencia visto desde la acometida de la empresa distribuidora de electricidad está mejorado y por lo tanto no facturará multas por bajo factor de potencia. Por otro lado los alimentadores no se verán aliviados en lo que respecta a caídas de tensión y pérdidas. Si estos aspectos no tienen mucho peso, esta compensación resulta económica y tiene la ventaja de encontrarse en un solo punto, lo cual facilita su inspección y maniobra. El capacitor o banco de capacitores puede conectarse manualmente para potencias moderadas, es el caso de pequeñas industrias, talleres y comercios, en los cuales se compensa una potencia promedio. Generalmente conviene desconectar los capacitores en horas de la noche o cuando no haya actividad, a los efectos de evitar sobretensiones.

Para mayores potencias se recurre a sistemas más elaborados en los cuales el banco se conecta ante la aparición de cierta potencia base o bien se subdivide en varios escalones que se conectan de forma automática comandados por un relé varimétrico.

Compensación por grupos

Este método consiste en corregir el factor de potencia en cada uno de los alimentadores, especialmente cuando éstos alimentan a varias cargas relativamente pequeñas y/o con factores de simultaneidad bajos, de esta forma se logra liberar potencia en los tableros de subdistribución y alimentadores.

Compensación individual

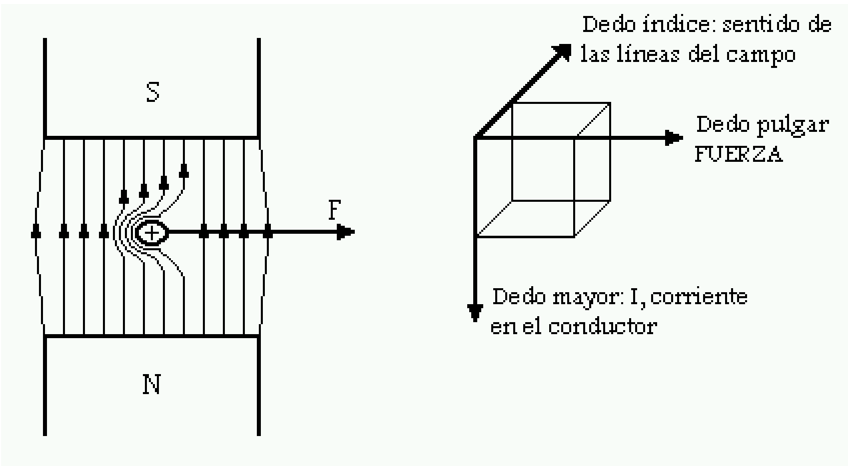
Esta disposición brinda la máxima posibilidad un cuanto a compensación ya que la energía reactiva se genera en el lugar que se consume. Su aplicación se centra en grandes motores asincrónicos, muy especialmente si son lentos, y en artefactos de iluminación.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS CON NÚCLEO DE HIERRO

Introducción: Electromagnetismo

Si se coloca un conductor por el que circula corriente dentro de un campo magnético, como consecuencia de la suma de los campos magnéticos producidos por el imán y por la corriente que circula por el conductor, se producirá una concentración de líneas de fuerza de un lado del conductor, intensificando el campo, y un espaciamiento del otro lado del conductor, debilitándolo.

Esta acción del campo magnético empuja al conductor hacia el lado del campo debilitado. La dirección de la fuerza experimentada por el conductor varía según la dirección del campo y el sentido de la corriente en el conductor. La dirección de esta fuerza puede establecerse fácilmente observando el comportamiento de las líneas del campo, pero resulta práctico utilizar la regla de Fleming de la mano izquierda, que dice: “Extendiendo los tres primeros dedos de la mano izquierda de modo que formen ángulos rectos entre sí y que el dedo índice apunte en la dirección del campo y el dedo mayor indique el sentido de la corriente en el conductor, el dedo pulgar indicará el sentido de la fuerza ejercida sobre el conductor”. O bien: “Colocando la mano izquierda abierta de forma que las líneas del campo penetren por la palma de la mano y que los dedos coincidan con el sentido de la corriente, el pulgar extendido da el sentido del movimiento del conductor”.



La experiencia ha demostrado que el valor de la fuerza es proporcional a la inducción B del campo magnético, a la intensidad de corriente I en el conductor y a la longitud útil del conductor, siendo ésta la porción del conductor comprendida dentro del campo magnético capaz de cortar cierto número de líneas del campo. Para un conductor rectilíneo de longitud finita la fuerza F es:

$$F = B \cdot l \cdot I \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α el ángulo que forma el conductor con la dirección del campo magnético. Si el ángulo es de 90º entonces:

$$F = B \cdot l \cdot I$$

F: fuerza ejercida sobre el conductor [N] l: longitud útil del conductor [m]
B: inducción del campo magnético [T] I: int. de corriente en el conductor [A]

En este principio se basa el funcionamiento de los motores eléctricos y los instrumentos analógicos de medición eléctrica que se dividen en tres tipos principalmente: De hierro móvil, de bobina móvil (e imán permanente), y electrodinámicos.

Ferromagnetismo

El principio en que se basa el electromagnetismo indica que alrededor de un conductor por el que circula una intensidad de corriente eléctrica se produce un campo magnético perpendicular al mismo, cuyo sentido puede determinarse con la regla de la mano derecha o del tirabuzón.

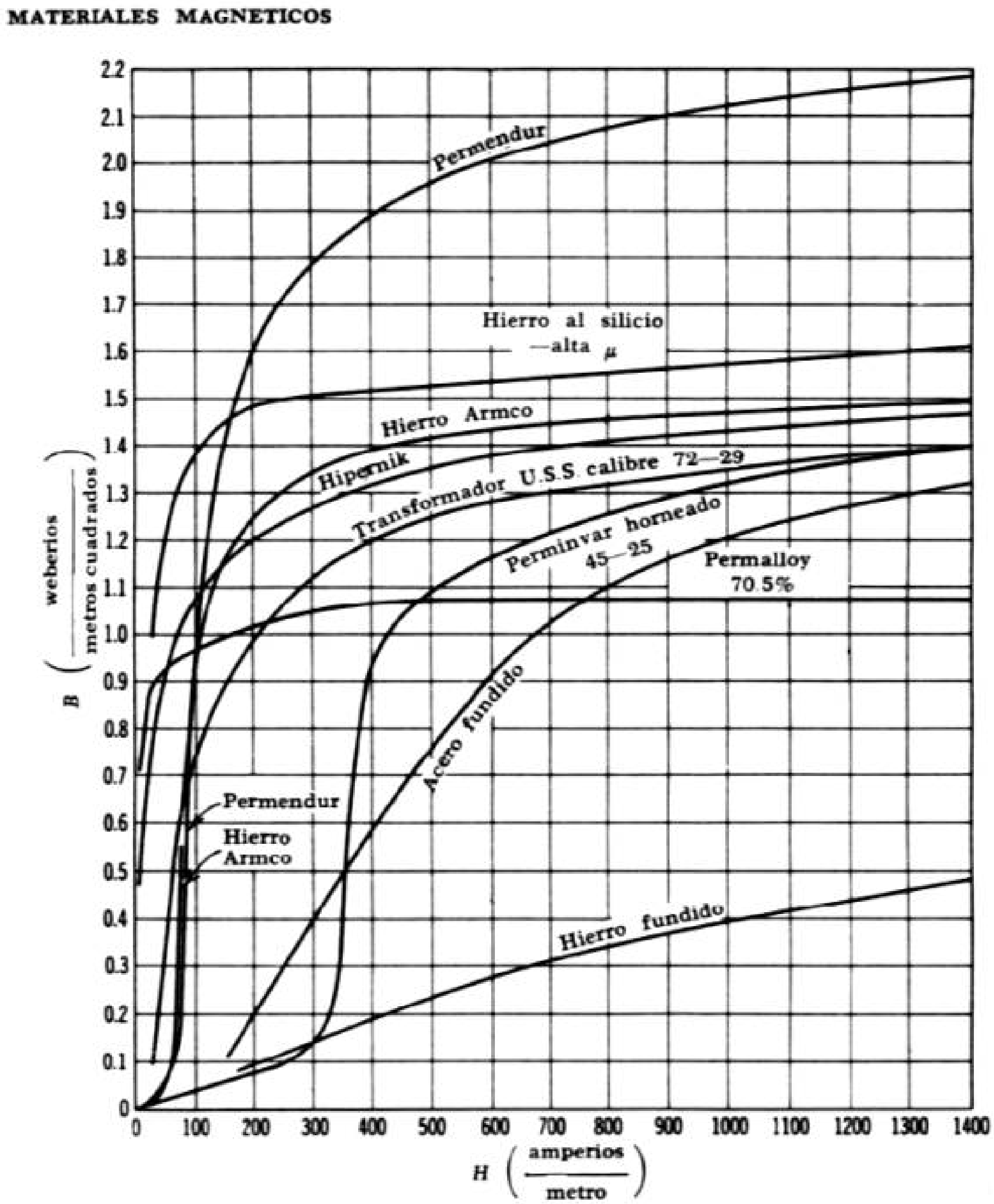
El campo magnético producido va a depender de una serie de factores que dependen de las características físicas del medio que lo produce y que estará definido por sus magnitudes magnéticas. Recordamos las magnitudes que definen al campo magnético, las cuales son: la inducción magnética “B” (cuya unidad es el Tesla [T] o Weber por metro cuadrado [Wb/m^2]), el flujo magnético “ϕ“(cuya unidad es el Weber [Wb]), la intensidad de campo magnético “H” (cuya unidad es el Ampere-vuelta por metro [Av/m], la fuerza magneto-motriz o excitación “θ“ (cuya unidad es el Ampere-vuelta [Av] y la reluctancia “$\Re$” (cuya unidad es uno sobre Henry [H^{-1}]. Las expresiones que relacionan estas magnitudes son:

$$\mathbf{d\phi = B \cdot ds} \qquad \mathbf{B = \mu\mu_0 \cdot H} \qquad \mathbf{H = \frac{N \cdot I}{l}}$$

$$\mathbf{\theta = N \cdot I} \qquad \mathbf{\Re = \frac{l}{\mu\mu_0 S}}$$

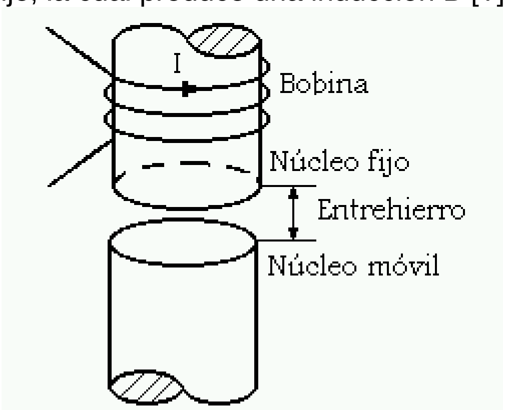
siendo:
ds: diferencial (cantidad infinitamente pequeña) de superficie (transversal al campo)
μ_0: permeabilidad absoluta del vacío
μ: permeabilidad relativa del material del núcleo
$\mu\mu_0$: permeabilidad absoluta del material del núcleo
N: número de vueltas (o espiras) de la bobina
I: corriente que circula por el conductor o bobina
l: longitud del campo magnético.
S: superficie (transversal al campo)
Para núcleo de aire la permeabilidad absoluta es cercana a la unidad y constante para cualquier valor de inducción. Lo mismo ocurre para otros materiales como son: madera, aluminio, en general, materiales no ferromagnéticos.
Cuando se trata de materiales ferromagnéticos el valor de la permebilidad relativa depende de varios parámetros: el valor de la inducción magnética, la composición del material, la temperatura a la que se encuentra y otros como pueden ser: el tratamiento térmico y el laboreo mecánico.
De esta forma no podemos tener un sólo valor de μ para el cálculo, sino que se obtienen curvas en forma experimental para cada material. Estas curvas representan el valor de inducción en función de intensidad de campo magnético (B = f(H)), y nos permiten, por ejemplo, conociendo el valor de inducción y el material del núcleo, determinar la intensidad de campo magnético necesario para producir esa inducción.
Por ejemplo en las curvas que se adjuntan, si la inducción B = 1 [T] y el material empleado para el núcleo es acero fundido, la intensidad de campo magnético necesario será H = 675 [Av/m]. Esto significa si la longitud del circuito magnético es de 1 [m], la fuerza magneto motriz necesaria para producir esa inducción será de 675 Av, lo que significa que si la bobina que producirá este campo es de 675 vueltas, la corriente necesaria será de 1 [A].

Como se puede deducir de la siguiente figura, el campo magnético resultante de una bobina con núcleo de material ferromagnético es mucho mayor que el creado por la misma bobina con núcleo de material no ferromagnético. Para visualizar ésto podemos tomar el ejemplo dado anteriormente en el cual para una inducción de B = 1 [T] era necesaria una intensidad de campo magnético H = 675 [Av/m], para núcleo de acero fundido. Si el núcleo fuera aire, Con una intensidad de campo igual al anterior sólo puedo obtener una inducción B = 1,256 x 10^{-3} [T], ya que B = $\mu\mu_0$ H y μ_0 = 8,478 x 10^{-7} [H/m].
De esta forma, tanto en motores, generadores, transformadores, se utilizará un núcleo de hierro, generalmente laminado.



<u>Fuerza magnética ejercida entre dos superficies</u>

Considérese un núcleo de hierro fijo y otro movible, supóngase que tienen superficies transversales iguales de S [m^2] y que circula una corriente I por una bobina que se encuentra alrededor del núcleo fijo, la cual produce una inducción B [T] en el entrehierro.



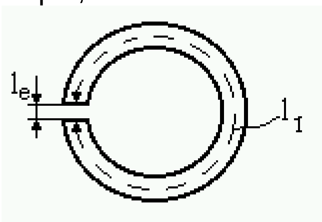
Existe una energía almacenada en el entrehierro establecida por la siguiente expresión:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Debido a esta energía almacenada existirá una fuerza de atracción entre las dos superficies. En este principio se basa el funcionamiento de los electroimanes y los contactores.

Circuitos magnéticos compuestos

Muchas veces el material donde se establece el campo magnético está formado por distintos materiales, es el caso, por ejemplo, de un anillo con un entrehierro, como el de la figura.



El núcleo está compuesto por un material ferromagnético y otro no ferromagnético (aire en este caso), dispuestos uno a continuación del otro, por lo que la reluctancia total del circuito será:

$$\Re_t = \frac{l_1}{\mu_1\mu_0 S_1} + \frac{l_e}{\mu_e\mu_0 S_e}[H^{-1}] \Rightarrow \Re_t = \frac{l_1}{\mu_1\mu_0 S_1} + \frac{l_e}{\mu_0 S_e}[H^{-1}] \quad - \quad \mu_e \cong 1$$

y el flujo magnético total será:

$$\phi_t = \frac{N \cdot I}{\Re_t}$$

En general si tenemos distintas características en el núcleo de un circuito magnético podemos calcular el valor de la reluctancia total del mismo dependiendo ésto de la configuración del circuito. Existe una similitud entre el circuito magnético y el circuito eléctrico que nos permite determinar lo siguiente: si se establece una circulación única de flujo magnético el circuito se puede asimilar a un circuito serie, y si se divide la circulación de flujo magnético, el circuito se puede asimilar a un circuito eléctrico en paralelo.

Las relaciones que se establecerán en uno y otro caso serán:

Circuito Serie

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots..$$

$$\Re = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 + \ldots..$$

$$\phi = \frac{\theta_1}{\Re_1} = \frac{\theta_2}{\Re_2} = \frac{\theta_3}{\Re_3} = \frac{\theta}{\Re} = \ldots$$

Circuito Paralelo

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \ldots..$$

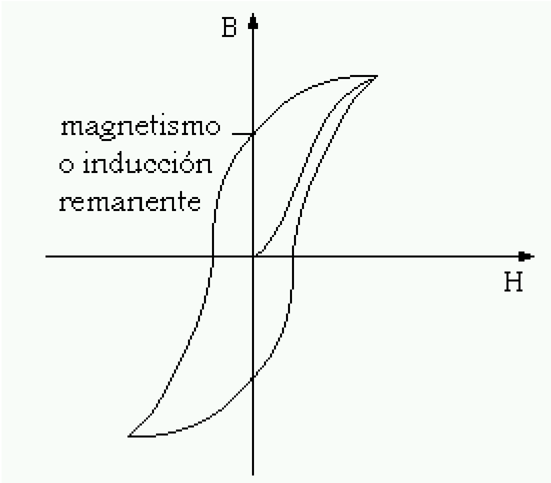
$$\theta = \Re_1 \cdot \phi_1 = \ldots.. = \Re \cdot \phi$$

En muchos casos prácticos presenta ciertos inconvenientes el cálculo de la reluctancia, por lo que es mas sencillo trabajar con las siguientes relaciones:

$$\theta = H \cdot l \quad - \quad H = \frac{N \cdot I}{l} \quad \Rightarrow \quad \theta = N \cdot I$$

Histéresis:

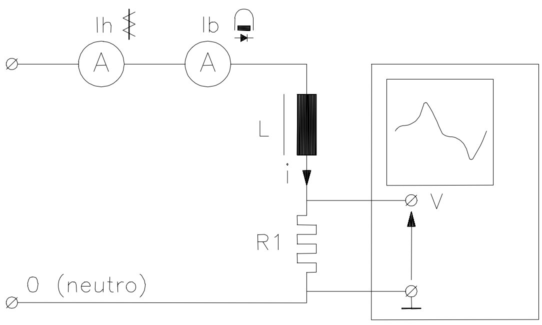
Al magnetizar una pieza de hierro completamente desmagnetizada, la inducción magnética respecto a la intensidad de campo a la que está sometida la pieza de hierro va aumentando, no en forma proporcional como se puede apreciar en las curvas adjuntas. Pero al disminuir la intensidad del campo, la inducción no decrece por el mismo camino por donde fue creciendo sino que va quedando en la pieza de hierro un magnetismo remanente que hace que al llegar a cero la intensidad del campo, la inducción en el hierro tenga un valor mayor que cero. Para llevar a cero el valor de inducción, será necesario aplicar un campo magnético de intensidad contraria la anterior. De esta forma se crea un lazo denominado ciclo de histéresis. Este ciclo es el que se produce en los núcleos magnéticos cuando las bobinas de un electroimán están alimentadas con corriente alterna.



LAZO O CICLO DE HISTERESIS

Corriente deformada de un circuito inductivo con núcleo de hierro.

Los circuitos inductivos con núcleo de hierro alimentados con tensión sinusoidal toman corrientes deformadas; la deformación está causada indirectamente por la alinealidad magnética del material del núcleo (Histéresis).
Suponiendo que el circuito tenga resistencia nula, la aplicación de la tensión sinusoidal **U** exigirá la autoinducción de una fuerza electromotriz opuesta **E**, que deberá estar inducida por un flujo también sinusoidal; para inducir este flujo el circuito inductivo admite una corriente deformada, según una relación *Flujo-Corriente* que corresponde al ciclo dinámico de histéresis del núcleo.
La onda de corriente posee un factor de forma superior a 1,11, presentando una elevación aguda en la cresta y un pequeño defasaje respecto de la onda del flujo. Pequeños aumentos sobre el valor de inducción máxima $\mathbf{B_{MAX}}$ causan mucha deformación de la corriente.
Este fenómeno es posible de visualizar en un osciloscopio, alimentando una bobina con núcleo de hierro saturado mediante una tensión senoidal. El circuito utilizado se esquematiza en la figura siguiente donde se puede observar la presencia de una resistencia en serie con la bobina, lo cual me permite visualizar una tensión (valor medido por el osciloscopio) proporcional a la forma de onda de la corriente que circula por el circuito serie.

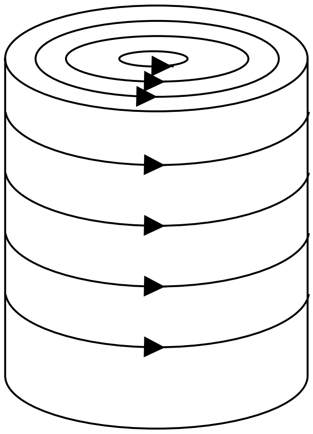


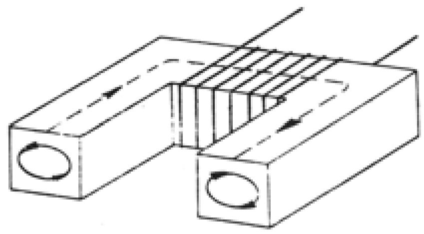
Pérdidas en el Hierro

Al circular una corriente alterna por una bobina que contenga un núcleo de hierro, se presentarán pérdidas debidas a las corrientes parásitas y a la histéresis.

Pérdidas por corrientes parásitas

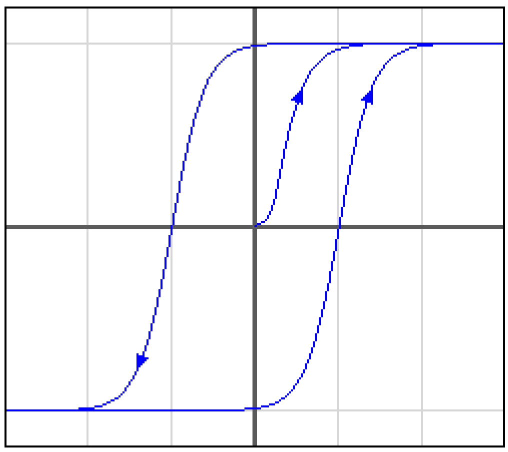
Cuando varía el flujo de fuerza a través de un núcleo de hierro, se induce en éste una f.e.m., la que da lugar en el mismo a corrientes que reciben el nombre de corrientes parásitas. Esto surge de considerar al núcleo como un conjunto formado por anillos independientes.





La existencia de estas corrientes trae consigo una pérdida de trabajo o de potencia. El trabajo perdido reaparece en el hierro en forma de calor.
La pérdida por corrientes parásitas es proporcional al peso de chapa del núcleo y al producto de la frecuencia y la inducción máxima al cuadrado, así como a las características intrínsecas del material
Para reducir al mínimo posible estas pérdidas en el núcleo de los transformadores por ejemplo, se construyen los mismos con material ferromagnético que consiste en agregarle a las chapas aleadas hasta un 4% de silicio, y se forman los núcleos por el apilado de chapas en vez de hacerlos macizos, para reducir el camino de las corrientes y así disminuir las pérdidas.

Pérdidas por histéresis

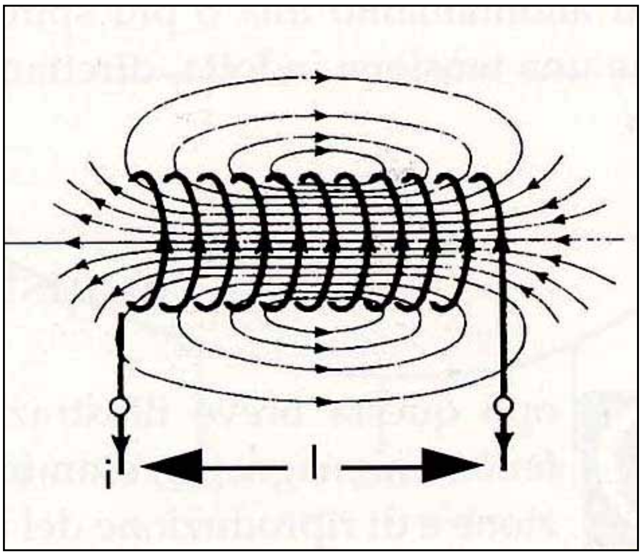


Al pasar una corriente alterna por una bobina con núcleo de hierro tiene lugar una magnetización continua alternativa del hierro. El flujo de inducción no será proporcional a la intensidad de la corriente. Esta no variará de forma senoidal.
Al considerar al hierro con magnetismo remanente, la rama ascendente de la curva de magnetismo no es igual a la rama descendente y el ciclo de histéresis encierra cierta área.

La curva positiva de potencia no es igual a la parte negativa (potencia devuelta), esto es, el trabajo suministrado es mayor que el recuperado: Existe por lo tanto una pérdida de trabajo que se obtiene de la diferencia de las dos áreas, es decir que es directamente proporcional al área del ciclo de histéresis.
Por lo antes dicho, sería deseable para bajar las pérdidas que el ciclo de histéresis sea lo mas estrecho posible, pero atendiendo a otros factores que intervienen en el rendimiento de un transformador, se llega a un ciclo de histéresis de compromiso, que tendrá el ancho ideal para minimizar las pérdidas.

Inductancia de dispersión

Cuando estudiamos el comportamiento de una bobina suponemos en principio que todo el flujo esta concatenado con todas las espiras de la misma. Bajo este supuesto, los amperios-vuelta del primario de una transformador (N_1I_1) a plena carga son iguales a los del secundario (N_2I_2). Y ambos esta desfasados 180º entre si o sea que se compensan.

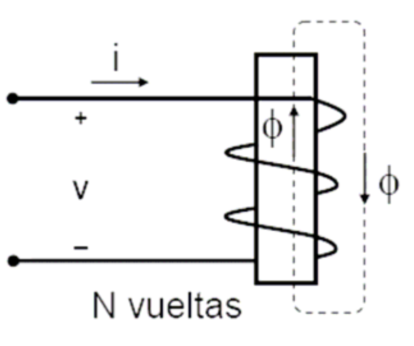


En la práctica no es así, pues su suma no es cero, sino igual a los amperios-vuelta en vacío (N_1I_0). En este caso hay que tener en cuenta que una parte de las líneas de inducción no esta concatenada con las dos bobinas. Este proceso se designa con el nombre de **Dispersión**. Las dos partes del flujo que no están concatenadas con los arrollamientos primario y secundario se llaman **flujos de dispersión**.

Cuanto mayor sea la dispersión, tanto mas actuarán las bobinas primaria y secundaria como carga inductiva y tanto menor será la potencia transmitida por el flujo de fuerza de la bobina primaria a la secundaria, por lo que será deseable reducir al mínimo este flujo de dispersión.

CIRCUITOS ACOPLADOS

Autoinducción



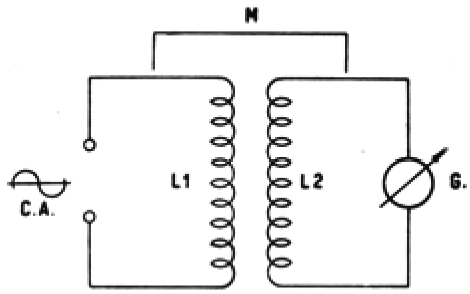
Si la corriente que circula por una bobina de un circuito varía, en el transcurso del tiempo también lo hace el flujo magnético que lo abraza, induciéndose en el una fuerza electromotriz (f.e.m.). Suponiendo que la permeabilidad magnética es constante, la f.e.m. inducida es proporcional a la variación de dicha corriente, esto es:

$$V_L = L\, di/dt$$

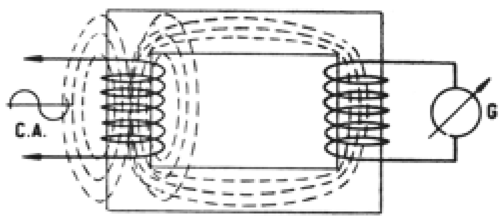
La constante de proporcionalidad L se llama coeficiente de autoinducción del elemento. La unidad de autoinducción de llama Henry (H). La expresión di/dt representa la velocidad de variación de la corriente que circula por la bobina.
El sentido de la tensión de autoinducción se deduce de la ley de Lenz (una f.e.m. inducida esta siempre dirigida en un sentido tal que tiende a contrarrestar la causa de la inducción), y puede determinarse con ayuda de la regla de la mano derecha. La tensión de autoinducción esta siempre dirigida de tal modo que se oponga a las variaciones de corriente que la producen, es decir, que al aumentar la intensidad de la corriente estará dirigida en sentido contrario a ésta, y en el mismo sentido que ésta al disminuir.
Ahora bien, cuando en las cercanías de una bobina se encuentra otra, el campo magnético de ambas se influencian, apareciendo fenómenos que corresponden a la inducción mutua entre ambas.

Inductancia Mutua.

Los efectos electromagnéticos producidos entre dos circuitos que se encuentren próximos, esto es, cuando los respectivos campos magnéticos de los mismos se influencien entre sí, han sido incluidos bajo la denominación de inductancia mutua o inducción mutua. Estos fenómenos son de gran aplicación en electrónica, radio y TV. Los transformadores representan un ejemplo típico de la inducción mutua entre dos circuitos.
Para poder interpretar mejor el efecto de inducción mutua, recurramos a la figura siguiente, donde se representa un inductor L1, alimentado por una corriente alterna y otro inductor L2 al que vamos a considerar se encuentra próximo al primero, de modo que sea influenciado por el campo magnético de aquel.



Evidentemente, al cerrar el circuito sobre L1, circulará por este bobinado una corriente alterna, que a su vez, dará origen a un campo magnético variable. Como L2 está próximo, este campo magnético ejercerá su acción sobre el mismo, creando sobre L2 una f.e.m. de autoinducción.
La tensión presente sobre L2, originará una circulación de corriente que será acusada por el instrumento intercalado. Por lo tanto, L2, a su vez, originará un nuevo campo magnético debido a la f.e.m. inducida, y este nuevo campo magnético afectará también a L1, que fue el que le dio origen.
Como resultado de ello se verán afectadas las respectivas autoinducciones de L1 y L2 en sus valores propios. Cuanto más próximos se encuentren entre sí ambos bobinados, mayor será el efecto mutuo provocado.
Definimos al Henry como la unidad de inductancia, diciendo que se tenía una inductancia de 1 Henry cuando una bobina recorrida por una corriente que variaba a razón de 1 Ampere por segundo, era capaz de generar una f.e.m. de autoinducción de 1 Volt. Pues bien, podemos decir ahora que el valor de Inductancia Mutua del circuito de la figura 1 será de 1 Henry cuando una variación de corriente de 1 Ampere por segundo sobre L1, genere sobre L2 una f.e.m. inducida de 1 Volt.
Es natural, pensar entonces, que para que sobre L2 se genere 1 Voltio, será necesario aproximarlo a L1 en una medida dada. Esto determinará el grado de acoplamiento entre ambos circuitos y afectará al valor de inductancia mutua. Se dice que dos circuitos se encuentran acoplados entre sí por la inductancia mutua. Esta se representa con la letra **M.**
Generalmente se hace uso de la inductancia mutua para transferir, por medios magnéticos, la energía eléctrica de un circuito a otro. La inductancia mutua de dos circuitos magnéticos es máxima cuando se logra un acoplamiento máximo. En el caso de la figura que consideramos, si todas las líneas de fuerza generadas por L1 alcanzan o cortan a todas las espiras de L2, existe acoplamiento máximo.
Como esta condición resulta en la práctica imposible de alcanzar, se puede expresar el grado de acoplamiento entre dos circuitos en tanto por ciento. Hay acoplamiento, digamos, del 25 %, cuando todas las líneas de fuerza atraviesan solo una parte del bobinado o cuando solo una cuarta parte de las líneas de fuerza atraviesan todo el bobinado. Es posible llegar a un grado de acoplamiento de casi el 100 % cuando se montan dos bobinados sobre un mismo núcleo, como en el caso de los transformadores de potencia, en los cuales es imprescindible una elevada transferencia de un circuito a otro.



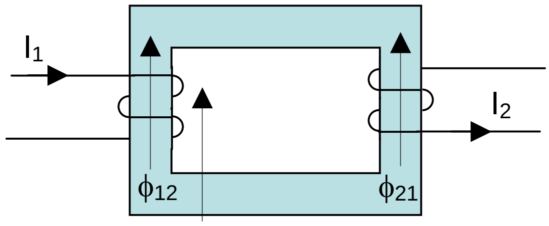
Surge ahora un nuevo coeficiente denominado coeficiente de acoplo que se define como las fracción del flujo total que abraza o

acopla alas dos bobinas. Este dependerá de la separación y orientación de los ejes de las bobinas y de la permeabilidad del medio.
Utilizando este coeficiente podemos calcular la inducción mutua M, a partir de las autoinducciones L_1 y L_2 como sigue:

$$\mathbf{M^2} = k^2 L_1 L_2$$

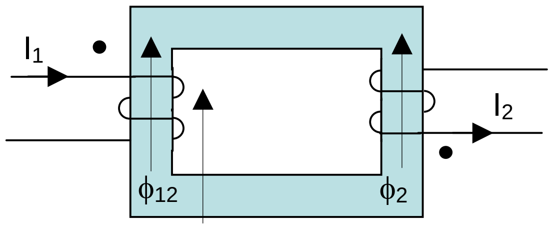
Polaridad de los arrollamientos

Cuando queremos estudiar un circuito con acoplo inductivo, necesitamos conocer el sentido en el que se generaran las tensiones y que circularán las corrientes naturales.
Para ello, si disponemos del diagrama del circuito en el que se vea el sentido de arrollamiento, podemos utilizar la regla de la mano derecha para aplicar la ley de Lenz.
Se elige la corriente I_1 de acuerdo con la fuente V_1 y aplicando la regla de la mano derecha se determina el sentido del flujo ϕ_{12}. Ahora bien, la ley de Lenz establece que la polaridad de la tensión inducida debe ser tal que si se cierra el circuito circula por la bobina una corriente de manera que el flujo que origina se opone al flujo principal creado por la corriente I_1. Por lo tanto, el sentido del flujo ϕ_{21} será el señalado en la figura. Si ahora se aplica la regla de la mano derecha a la segunda bobina hallaremos el sentido de la corriente natural del circuito.

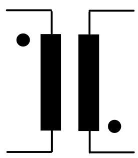


En caso que no tengamos dibujado el sentido de arrollamiento de las bobinas no podremos aplicar el método anterior. Se usa entonces la **regla de los puntos** que indicará la polaridad relativa de las bobinas teniendo en cuenta solo la inducción mutua.

Para asignar los puntos a un par de bobinas acopladas se elige un sentido para la corriente en una de ellas y se coloca un punto en el terminal por el que la corriente entra en el arrollamiento. Aplicando la regla de la mano derecha se determina el flujo correspondiente. Ahora, en la segunda bobina, según la ley de Lenz, el flujo ha de oponerse al creado por la variación de corriente. Utilizando nuevamente la regla de la mano derecha, se determina el sentido de la corriente natural colocando el otro punto en el terminal por el que dicha corriente sale del arrollamiento.



No es preciso entonces dibujar los núcleos y el diagrama queda simplemente:

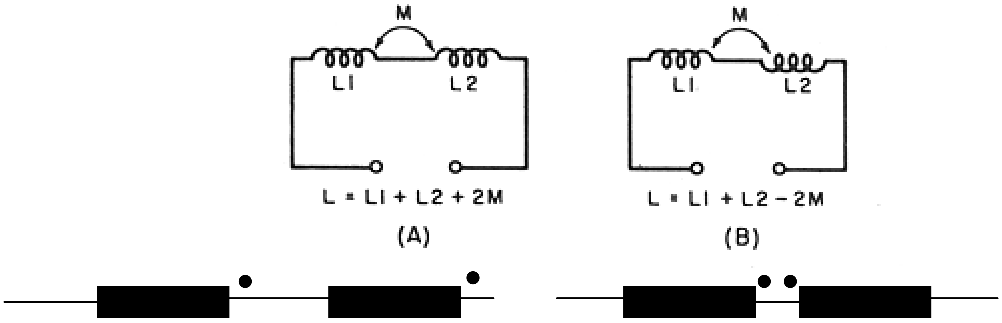


Bobinas acopladas en serie

Cuando conectamos dos bobnas en serie pueden darse dos posibilidades, que sus campos se sumen o que sus campos se resten. Entonces si dos bobinas acopladas mutuamente se conectan en serie con sus campos sumándose mutuamente (serie aditiva), la inductancia total es

$$\mathbf{L = L_1 + L_2 + 2M} \text{ (henrios)}$$

donde **M** es la inductancia mutua, y $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$, son las inductancias de las bobinas individuales.



A) en serie aditiva B) en serie sustractiva.

Si las bobinas se conectan en serie, y sus campos se oponen la inductancia total está dada por

$$\mathbf{L = L_1 + L_2 - 2M} \text{ (henrios)}$$

Estas fórmulas pueden ser usadas para determinar la inductancia mutua (M) conectando primero las bobinas en serie aditiva y luego en serie sustractiva. Entonces,

$$M = \frac{L_a - L_b}{4}$$

donde $\mathbf{L_a}$ es la inductancia total de las bobinas en serie aditiva y $\mathbf{L_b}$, es la inductancia total de las bobinas en serie sustractiva.

Bobinas acopladas en Paralelo.

La inductancia total (**L**) de dos bobinas acopladas, conectadas en paralelo, con sus campos que se suman, es

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1 + M} + \frac{1}{L_2 + M}$$

donde $\mathbf{L_1}$; $\mathbf{L_2}$; y **M** corresponden a las definiciones anteriores (en henrios) . La inductancia total de dos bobinas acopladas, conectadas en paralelo, con sus campos en oposición, está dada por

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1 - M} + \frac{1}{L_2 - M}$$

ANEXOS

1- Variación de la resistencia con la temperatura

La resistividad y, por lo tanto la resistencia R dependen de la temperatura. Esta variación es diferente en materiales de distintas características (mayor, menor, positiva, negativa) pero, en el rango de diferencias de temperaturas entre 0 y 150 ºC, la variación de resistencia se puede considerar aproximadamente proporcional a la variación de temperaturas, según la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = \alpha(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{R}_1$$

El factor de proporcionalidad α se denomina coeficiente de temperatura y depende también de ésta, encontrándose en tablas, generalmente, referido a 20 ºC. La resistencia R_1 representa, entonces, la resistencia medida o calculada a 20 ºC, con lo cual, para calcular R_2, podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{20}\left[\mathbf{1} + \alpha_{20}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{20})\right]$$

Si no se conoce el valor de resistencia a 20 ºC y se tienen un valor de resistencia a una temperatura 1, para calcular el valor de resistencia a una temperatura 2, se puede aplicar la siguiente relación:

$$\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} = \frac{\mathbf{R}_{20}\left[\mathbf{1} + \alpha_{20}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{20})\right]}{\mathbf{R}_{20}\left[\mathbf{1} + \alpha_{20}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{20})\right]} \Rightarrow \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \frac{\mathbf{1} + \alpha_{20}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{20})}{\mathbf{1} + \alpha_{20}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{20})}$$

2- Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin establece que cualquier circuito lineal activo (*) con terminales A y B como el representado en la figura (1), equivale, o puede sustituirse por una fuente de tensión U’ en serie con una impedancia Z’ (figura (2)).

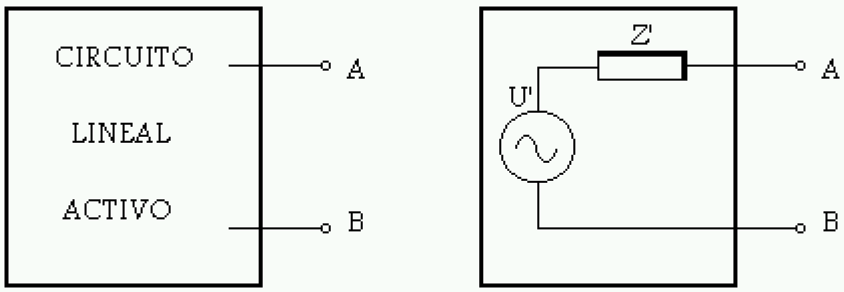
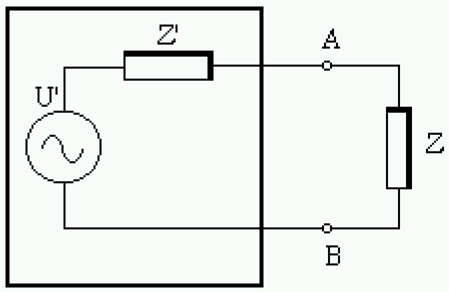


FIGURA (1) FIGURA (2)

La tensión equivalente de Thevenin U’, es la tensión entre los terminales de A y B medida a circuito abierto (sin carga entre A y B) y la impedancia equivalente Z’ es la impedancia entre los terminales A y B con todas las fuentes internas iguales a cero (cortocircuitadas).
La polaridad de U’ se elige de tal forma que la corriente en una impedancia que se conecte entre A y B tenga el mismo sentido que si dicha impedancia se conectara al circuito activo.
De esta forma, cualquiera sea el circuito lineal activo antes de los terminales A y B, se puede calcular en forma sencilla la corriente que circula por una impedancia conectada a estos terminales mediante la resolución de un circuito serie tal como el de la figura (3).

FIGURA (3)


(*) Circuito lineal activo: es aquel en el cual la tensión y la corriente son directamente proporcionales (lineal) y en el que están presentes fuentes de tensión o de corriente (activo).

3- Tablas para corrección del factor de potencia

Tabla Nº 1: Coeficientes para cálculo de Potencia reactivas de Capacitores

		FACTOR DE POTENCIA DESEADO EN POR CIENTO																				
		80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	40	1.541	1.568	1.594	1.619	1.642	1.671	1.695	1.723	1.745	1.777	1.807	1.833	1.862	1.893	1.926	1.963	1.996	2.037	2.085	2.146	2.291
F	41	1.475	1.502	1.526	1.551	1.579	1.605	1.632	1.660	1.682	1.714	1.740	1.770	1.799	1.830	1.863	1.896	1.933	1.974	2.002	2.063	2.225
A	42	1.410	1.438	1.464	1.489	1.508	1.541	1.567	1.594	1.621	1.648	1.676	1.705	1.734	1.765	1.797	1.832	1.869	1.910	1.757	2.018	2.161
C	43	1.349	1.376	1.402	1.427	1.450	1.480	1.503	1.531	1.553	1.586	1.615	1.641	1.670	1.701	1.734	1.771	1.804	1.845	1.893	1.954	2.100
T	44	1.291	1.318	1.344	1.369	1.395	1.421	1.448	1.476	1.498	1.531	1.557	1.586	1.615	1.646	1.679	1.712	1.749	1.790	1.838	1.899	2.041
O	45	1.235	1.265	1.291	1.316	1.342	1.365	1.395	1.423	1.445	1.478	1.501	1.533	1.562	1.593	1.626	1.656	1.696	1.737	1.785	1.846	1.985
R	46	1.180	1.207	1.233	1.258	1.283	1.310	1.336	1.364	1.386	1.412	1.446	1.474	1.503	1.534	1.567	1.602	1.637	1.678	1.726	1.787	1.930
	47	1.128	1.153	1.181	1.206	1.234	1.257	1.287	1.315	1.337	1.370	1.392	1.425	1.454	1.485	1.518	1.548	1.588	1.629	1.677	1.738	1.877
D	48	1.077	1.104	1.130	1.155	1.180	1.208	1.236	1.264	1.286	1.319	1.343	1.371	1.400	1.431	1.464	1.499	1.534	1.575	1.623	1.684	1.828
E	49	1.029	1.056	1.082	1.107	1.136	1.159	1.189	1.217	1.239	1.267	1.295	1.327	1.356	1.387	1.420	1.450	1.490	1.531	1.579	1.630	1.779
	50	.982	1.008	1.034	1.060	1.086	1.112	1.139	1.165	1.192	1.220	1.248	1.276	1.303	1.337	1.369	1.403	1.441	1.481	1.529	1.590	1.732
P	51	.936	.962	.988	1.014	1.040	1.066	1.093	1.119	1.146	1.174	1.202	1.230	1.257	1.291	1.323	1.357	1.395	1.435	1.483	1.544	1.685
O	52	.894	.920	.946	.972	.998	1.024	1.051	1.077	1.104	1.132	1.160	1.188	1.215	1.249	1.281	1.315	1.353	1.393	1.441	1.502	1.644
T	53	.850	.876	.902	.928	.954	.980	1.007	1.033	1.060	1.089	1.116	1.144	1.174	1.205	1.237	1.271	1.309	1.349	1.397	1.458	1.600
E	54	.809	.835	.861	.887	.913	.939	.966	.992	1.019	1.047	1.075	1.133	1.130	1.164	1.196	1.230	1.268	1.308	1.356	1.417	1.559
N	55	.769	.795	.821	.847	.873	.899	.926	.952	.979	1.007	1.035	1.063	1.090	1.124	1.156	1.190	1.227	1.268	1.316	1.377	1.519
C	56	.730	.756	.782	.808	.834	.860	.887	.913	.940	.969	.996	1.024	1.051	1.085	1.117	1.151	1.189	1.229	1.277	1.338	1.483
I	57	.692	.718	.744	.770	.796	.822	.849	.875	.902	.930	.958	.986	1.013	1.047	1.079	1.113	1.151	1.191	1.239	1.300	1.442
A	58	.655	.681	.707	.733	.759	.785	.812	.838	.865	.893	.921	.949	.976	1.010	1.042	1.076	1.114	1.154	1.202	1.263	1.405
	59	.618	.644	.670	.696	.722	.748	.775	.801	.828	.856	.884	.912	.939	.973	1.005	1.039	1.077	1.117	1.165	1.226	1.368
E	60	.584	.610	.636	.662	.688	.714	.741	.767	.794	.822	.850	.878	.905	.939	.971	1.005	1.043	1.083	1.131	1.192	1.334
X	61	.549	.575	.601	.677	.653	.679	.706	.732	.759	.787	.815	.843	.870	.904	.936	.970	1.008	1.048	1.096	1.157	1.299
I	62	.515	.541	.567	.593	.619	.645	.672	.698	.725	.753	.781	.809	.836	.870	.902	.936	.974	1.014	1.062	1.123	1.265
S	63	.483	.509	.535	.561	.587	.613	.640	.666	.693	.721	.749	.777	.804	.838	.870	.904	.942	.982	1.030	1.091	1.233
T	64	.450	.476	.502	.528	.554	.580	.607	.633	.660	.683	.716	.744	.771	.805	.837	.871	.909	.949	.997	1.058	1.200
E	65	.419	.445	.471	.497	.523	.549	.576	.602	.627	.657	.685	.713	.740	.774	.806	.840	.878	.918	.966	1.027	1.169
N	66	.388	.414	.440	.466	.492	.518	.545	.571	.598	.626	.654	.682	.712	.743	.775	.809	.847	.887	.935	.996	1.138
T	67	.358	.384	.410	.436	.462	.488	.515	.541	.568	.596	.624	.652	.679	.713	.745	.779	.817	.857	.905	.966	1.108
E	68	.329	.355	.381	.407	.433	.459	.486	.512	.539	.567	.595	.623	.650	.684	.716	.750	.788	.828	.876	.937	1.079
	69	.299	.325	.351	.377	.403	.429	.456	.402	.509	.537	.565	.593	.620	.654	.686	.720	.758	.798	.840	.907	1.049
E	70	.270	.296	.322	.348	.374	.400	.427	.453	.480	.509	.526	.564	.591	.625	.657	.691	.729	.769	.811	.878	1.020
N	71	.242	.268	.294	.320	.346	.372	.399	.425	.452	.480	.508	.536	.563	.597	.629	.663	.701	.741	.783	.850	.992
	72	.213	.239	.265	.291	.317	.343	.370	.396	.423	.451	.479	.507	.534	.568	.600	.634	.672	.712	.754	.821	.963
P	73	.186	.212	.238	.264	.290	.316	.343	.369	.396	.424	.452	.480	.507	.541	.573	.607	.645	.685	.727	.794	.936
O	74	.159	.185	.211	.237	.263	.289	.316	.342	.369	.397	.425	.453	.480	.514	.546	.580	.618	.658	.700	.767	.909
R	75	.132	.158	.184	.210	.236	.262	.289	.315	.342	.370	.398	.426	.453	.487	.519	.553	.591	.631	.673	.740	.882
C	76	.105	.131	.157	.183	.209	.235	.262	.288	.315	.343	.371	.399	.426	.460	.492	.526	.564	.604	.652	.713	.855
I	77	.079	.105	.131	.157	.183	.209	.236	.262	.289	.317	.345	.373	.400	.434	.466	.500	.538	.578	.620	.687	.829
E	78	.053	.079	.105	.131	.157	.183	.210	.236	.263	.219	.319	.347	.374	.408	.440	.474	.512	.552	.594	.661	.803
N	79	.026	.052	.078	.104	.130	.156	.183	.209	.236	.264	.292	.320	.347	.381	.413	.447	.485	.525	.567	.634	.776
T	80	.000	.026	.052	.078	.104	.130	.157	.183	.210	.233	.266	.294	.321	.355	.387	.421	.459	.499	.541	.608	.750
O	81	....	.000	.026	.052	.078	.104	.131	.157	.184	.212	.240	.268	.295	.329	.361	.395	.433	.473	.515	.582	.724
	82	....	....	.000	.026	.051	.078	.105	.131	.158	.185	.214	.242	.269	.303	.335	.369	.407	.447	.489	.556	.698
	83	....	....	....	.000	.026	.052	.079	.105	.132	.160	.188	.216	.243	.309	.300	.343	.381	.421	.463	.530	.672
	84	....	....	....	....	.000	.026	.053	.079	.106	.134	.162	.190	.217	.251	.283	.317	.355	.395	.437	.504	.645
	85	....	....	....	....	....	.000	.027	.053	.080	.108	.136	.164	.191	.225	.257	.291	.329	.369	.417	.478	.620

Tabla Nº 2: Potencia Capacitiva recomendada para compensación individual

POTENCIA EN EL EJE [CV]	POTENCIA EN EL EJE [KW]	VELOCIDAD DE SINCRONISMO [rpm]	CORRIENTE A PLENA CARGA [A]	COS φ A PLENA CARGA	POTENCIA REACTIVA EN VACÍO [KVAr]	POTENCIA REACT. CAPAC. OPTIMA [KVAr]
1	0.75	750	2.48	0.67	0.80	0.56
		1000	2.28	0.72	0.74	0.52
		1500	2.04	0.75	0.54	0.38
		3000	1.84	0.82	0.39	0.28
1.5	1.1	750	3.48	0.67	1.34	0.94
		1000	3.28	0.72	1.03	0.72
		1500	2.76	0.80	0.93	0.65
		3000	0.55	0.86	0.51	0.36

2	1.5	750 1000 1500 3000	4.06 3.98 3.60 3.42	0.72 0.76 0.81 0.86	1.31 1.22 1.10 0.53	0.91 0.85 0.77 0.37
3	2.2	750 1000 1500 3000	6.00 5.53 5.15 4.93	0.71 0.77 0.82 0.87	2.17 1.46 1.32 0.64	1.52 1.02 0.92 0.45
4	3	750 1000 1500 3000	7.81 7.46 6.95 6.29	0.72 0.76 0.82 0.90	2.90 2.22 1.92 0.81	2.03 1.55 1.34 0.57
5.5	4	750 1000 1500 3000	10.22 9.88 8.60 8.14	0.72 0.76 0.84 0.90	3.56 2.66 2.07 0.89	2.67 2.00 1.55 0.66
7.5	5.5	750 1000 1500 3000	13.80 13.50 11.75 11.31	0.73 0.76 0.83 0.88	4.49 3.48 2.47 0.91	3.37 2.61 1.85 0.69
10	7.5	750 1000 1500 3000	18.23 16.85 15.65 14.96	0.74 0.78 0.84 0.90	5.77 4.45 3.40 1.08	4.33 3.33 2.55 0.81
15	11	750 1000 1500 3000	25.82 24.52 22.00 22.04	0.77 9.81 0.86 0.88	7.33 5.64 4.03 2.21	5.86 4.51 3.22 1.76
20	15	750 1000 1500 3000	33.80 31.48 30.06 28.84	0.78 0.81 0.84 0.88	9.99 6.72 5.80 2.90	8.00 5.38 4.64 2.32
25	18.5	750 1000 1500 3000	38.00 38.20 38.10 34.76	0.86 0.81 0.84 0.89	8.89 8.61 5.90 4.12	7.56 7.32 5.02 3.50
30	22	750 1000 1500 3000	44.00 45.38 44.62 41.78	0.86 0.83 0.84 0.89	12.14 10.46 7.54 5.67	10.32 8.96 6.41 4.81
40	30	750 1000 1500 3000	60.00 58.00 56.85 56.43	0.85 0.86 0.87 0.88	14.57 12.66 11.05 7.79	12.38 10.76 9.40 6.62
50	37	750 1000 1500 3000	75.00 71.00 70.00 70.45	0.80 0.87 0.86 0.88	20.73 15.00 13.84 9.94	17.62 12.75 11.76 8.45
60	45	750 1000 1500 3000	89.00 86.00 84.00 83.00	0.82 0.86 0.88 0.90	23.47 18.77 15.46 10.75	19.95 15.95 13.14 9.14
75	56.2	750 1000 1500 3000	108.00 103.00 102.00 103.00	0.84 0.87 0.86 0.90	26.84 21.72 20.17 13.34	22.81 18.46 17.14 11.34
100	75	750 1000 1500 3000	140.00 141.00 138.00 140.00	0.85 0.86 0.87 0.88	34.00 30.79 26.36 19.67	28.90 26.16 22.40 16.80

4- Tablas de datos generales

PREFIJOS PARA MULTIPLOS Y SUBÍNDICE DE UNIDADES S.I					
Prefijo	**Abreviatura**	**Cant. De unidades**	**Prefijo**	**Abreviatura**	**Cant. De unidades**
Exa	E	10^{18}	**Deci**	d	10^{-1}
Peta	P	10^{15}	**Centi**	C	10^{-2}
Tera	T	10^{12}	**Mili**	m	10^{-3}
Giga	G	10^{9}	**Micro**	μ	10^{-6}
Mega	M	10^{6}	**Nano**	n	10^{-9}
kilo	K	10^{3}	**Pico**	p	10^{-12}
Hecto	H	10^{2}	**Fento**	f	10^{-15}
Deca	D	10	**Atto**	a	10^{-18}